

## **Занятие №1**

### **Введение. Повторение школьного курса математики**

Математика играет ключевую роль в профессиональной подготовке студентов среднего профессионального образования (СПО), обеспечивая фундамент для понимания и решения задач в различных областях. Её изучение способствует развитию аналитического мышления, способности к логическому рассуждению и применению количественных методов в профессиональной деятельности.

#### **Цели изучения математики в СПО:**

**1. Формирование базовых математических знаний:** Обеспечение понимания основных математических понятий, теорий и методов, необходимых для освоения профессиональных дисциплин.

**2. Развитие аналитического мышления:** Способствование развитию способности анализировать и решать сложные задачи, что является неотъемлемой частью многих профессий.

**3. Применение математических методов в профессиональной деятельности:**

Обучение использованию математических инструментов для моделирования, анализа и оптимизации процессов в различных сферах.

Математика является одной из самых древних наук. Слово математика происходит от греческого слова «матема», что означает знание. Зародилась математика на заре человеческой цивилизации под влиянием потребностей практики. Строительство, измерение площадей земельных участков, навигация, торговые расчеты, управление государством требовали умения производить арифметические вычисления и определенных геометрических знаний.

В результате многовековой трудовой деятельности людей возникли основные абстрактные математические понятия, такие как число, геометрическая фигура, функция, производная, интеграл и т.д. За свою историю математика превратилась в стройную дедуктивную науку, представляющую мощный аппарат для изучения окружающего нас мира.

Можно выделить четыре основных периода в истории развития математики:

1) Период зарождения математики – от древних времен до VI – V вв. до нашей эры. В этом периоде создается арифметика и начало геометрии, формулируются правила решения различных практических задач.

2) Период элементарной математики, т.е. математики постоянных величин – VI – V вв. до нашей эры – XVII в. нашей эры. Евклид создает «Начала», в которых на базе системы аксиом излагается дедуктивным образом вся элементарная геометрия. Изданное в IX веке сочинение ал-Хорезми «Китаб ал-джабр ал-мукабала» содержит общие приемы решения задач, сводящиеся к уравнениям первой и второй степени. От названия этого сочинения и происходит термин «алгебра», а от имени ал-Хорезми произошел термин «алгоритм» - одно из фундаментальных понятий современной математики. В XV в. стала вводиться алгебраическая символика и этим были созданы основы формального математического языка.

3) Период создания математики переменных величин – XVII в. - середина XIX в. На первый план выдвигаются понятия переменной величины и функции. В этом периоде в работах Декарта на базе широкого использования метода систем координат создается аналитическая геометрия. В работах Ньютона и Лейбница завершается создание дифференциального и интегрального исчислений. Большой вклад в дальнейшее развитие математики внес Л.Эйлер.

4) Период современной математики. (Середина XIX в.). Этот период начинается с работ Э.Галуа, в которых заложены идеи алгебраических структур, и Н.И.Лобачевского, который открыл первую неевклидову геометрию – геометрию Лобачевского. Дальнейшее распространение получил аксиоматический метод, активно развивается математическая логика и математическое моделирование. Проникновение методов современной математики в другие науки и в практику принимает настолько всеобщий и глубокий характер, что одной из особенностей современного этапа развития человеческой культуры считается процесс математизации и компьютеризации всех сфер трудовой деятельности и жизни людей. Математические методы и вычислительная техника применяются не только

в таких традиционных науках, как механика, астрономия, физика, но и в экономике, химии и даже в социологии, лингвистике, биологии, медицине и др.

5) Создание в середине XX века электронных вычислительных машин привело к процессу математизации знаний и компьютеризации всех сфер трудовой деятельности и жизни людей.

Цель изучения математики в средних специальных учебных заведениях состоит в том, чтобы углубить знания по изученным в средней школе разделам и ознакомиться с некоторыми новыми разделами математики (аналитической геометрией, теорией дифференциальных уравнений, теорией вероятностей, и др.), которые обогащают общую культуру, развивают логическое мышление и широко используются в математическом моделировании задач, с которыми встречается современный специалист в своей деятельности. Математика играет ключевую роль в развитии современных технологий и научных достижений. Рассмотрим конкретные примеры её применения в различных областях:

### **1. Искусственный интеллект и голосовые помощники**

Современные голосовые ассистенты, такие как «Алиса» от Яндекса и «Маруся» от VK, активно используют математические алгоритмы для обработки и понимания естественного языка. Эти системы применяют методы машинного обучения, статистики и теории вероятностей для анализа пользовательских запросов и формирования соответствующих ответов. Математические модели позволяют ассистентам распознавать речь, интерпретировать контекст и обеспечивать взаимодействие с пользователем в реальном времени.

### **2. Криптография и кибербезопасность**

Математические методы лежат в основе современных систем защиты информации. Алгоритмы шифрования, такие как RSA и AES, основаны на сложных математических задачах, обеспечивая безопасность передачи данных в цифровом мире. Криптография использует теорию чисел, алгебру и другие разделы математики для создания устойчивых к взлому систем.

### **3. Компьютерная графика и моделирование**

Визуализация данных, создание анимаций и моделирование физических процессов невозможны без применения математических методов. Линейная алгебра,

геометрия и численные методы позволяют создавать реалистичные изображения и симуляции, используемые в киноиндустрии, дизайне и научных исследованиях.

#### **4. Анализ больших данных**

Обработка и анализ больших объемов информации требуют применения статистических методов и алгоритмов машинного обучения. Математика помогает выявлять скрытые закономерности, прогнозировать тенденции и принимать обоснованные решения на основе данных.

#### **Вклад российских учёных в развитие математики:**

Николай Иванович Лобачевский: Создатель неевклидовой геометрии, которая расширила представления о пространстве и легла в основу многих современных научных теорий. Подробнее об учёном можно прочитать в статье.

Пафнутий Львович Чебышёв: Внёс значительный вклад в теорию чисел, математический анализ и механику, разработав методы, используемые в теории вероятностей и статистике. Подробнее об учёном можно прочитать в статье.

Андрей Николаевич Колмогоров: Основоположник современной теории вероятностей и автор фундаментальных работ в области турбулентности и классической механики. Подробнее об учёном можно прочитать в статье.

Изучение математики не только обогащает твои теоретические знания, но и предоставляет инструменты для эффективного решения практических задач в твоей будущей профессиональной деятельности!

Число – одно из основных понятий математики, возникшее еще до нашей эры в связи с потребностями счета предметов.  $\mathbb{N}$  – множество натуральных чисел. Исторически примерно одновременно возникли понятия натуральных и положительных рациональных чисел. В системе натуральных чисел выполняются операции сложения и умножения, но не всегда выполняется операция вычитания. В множество натуральных чисел входят числа 1, 2, 3, 4, 5... , то есть числа, используемые для счёта предметов.

Намного позже люди пришли к понятию отрицательного числа. Необходимость введения этого понятия связана с исследованием величин, которые меняются в двух направлениях: температура, уровень реки, доходы и убытки и т.д. Отрицательные числа стали широко применяться в математике с XVII века в связи с

введением метода координат. В Европе отрицательные числа ввел в употребление в XVII в. французский ученый Декарт.

Целые числа – это объединение множества натуральных чисел, множества чисел, противоположных натуральным и числа ноль.  $\mathbb{Z}$  – множество целых чисел. В нем выполняются операции сложения, вычитания и умножения, но не всегда выполняется операция деления. К целым числам относятся натуральные числа, число 0 и числа  $-1, -2, -3, -4, -5, \dots$ , то есть противоположные натуральным.

Буквой  $\mathbb{N}$  обозначается множество натуральных чисел, буквой  $\mathbb{Z}$  — множество целых чисел.

Математическая запись  $n \in \mathbb{N}$  обозначает, что  $n$  — натуральное число.

Запись  $m \in \mathbb{Z}$  обозначает, что  $m$  — целое число».

### **Делимость натуральных чисел**

Пусть даны два натуральных числа —  $a$  и  $b$ . Если существует натуральное число  $q$  такое, что выполняется равенство  $a=bq$ , то говорят, что число  $a$  делится на число  $b$ . При этом число  $a$  называют делимым,  $b$  — делителем,  $q$  — частным. Число  $a$  называют также кратным числа  $b$ .

Запись  $a:b$  читают: « $a$  делится на  $b$ ».

Уточним, запись  $6:3$  означает действие, деление можно выполнить  $6:3=2$ , а запись  $6 \div 3$  означает, что число 6 делится на 3 (делится нацело, без остатка).

Если натуральное число  $a$  не делится нацело на натуральное число  $b$ , то можно выполнить деление с остатком.

Пример:

разделим число 23 на число 10 с остатком. Получаем неполное частное 2 и остаток 3. Значит, число 23 можно представить в виде  $23=10 \cdot 2+3$ .

Если натуральное число  $a$  больше натурального числа  $b$ , и  $a$  не делится на  $b$ , то существует, и только одна, пара натуральных чисел  $q$  и  $r$  — причём  $r < b$  — такая, что выполняется равенство

$$a=bq+r.$$

Для  $a=23$ ,  $b=10$  такая пара чисел найдена выше:  $q=2$ ,  $r=3$  — при этом остаток  $r$  меньше делителя  $b$ .

**Рациональные числа — это числа вида  $\frac{m}{n}$ , где  $m$  — целое число, а  $n$  — натуральное число.**

Множество рациональных чисел обозначают буквой  $Q$ .

Это множество включает в себя множество целых чисел  $Z \subset Q$ , так как целое число  $m$  можно представить в виде  $m/1$ .

Итак, можно сказать, что **рациональные числа — это все целые числа, а также положительные и отрицательные обыкновенные дроби.**

**К рациональным числам относятся и десятичные дроби, т. к. они являются частным случаем обыкновенных дробей.**

Любое рациональное число можно записать в виде дроби  $\frac{m}{n}$ , где  $m \in Z$ ,  $n \in N$

Для выполнения практических вычислений, как правило, необходимо представить числа в виде *десятичных дробей*.

Разделив " $m$ " на " $n$ " получаем конечную или бесконечную десятичную дробь

$$\frac{1}{4} = 0,25$$

$$\frac{5}{9} = 0,5555K$$

$$-\frac{6}{5} = -1,2$$

$$-\frac{3}{7} = -0,428571428571K$$

$$\frac{1}{3} = 0,3333K$$

$$4\frac{47}{90} = 4,5222$$

Рассмотрим целое число 7, обыкновенную дробь  $\frac{5}{11}$  и десятичную дробь 4,244.

Целое число 7 можно представить в виде бесконечной десятичной дроби 7,0000...

Десятичную дробь 4,244 тоже можно представить в виде бесконечной десятичной дроби 4,244000...

$$\begin{array}{r|l} 5,0000 & 11 \\ \hline 0 & 0,4545... \\ 50 & \\ \hline 44 & \\ 60 & \\ \hline 55 & \\ 50 & \\ \hline 44 & \\ 60 & \\ \hline 55 & \\ \hline ... & \end{array}$$

Для числа  $\frac{5}{11}$  применим метод «деления углом»:

Замечаем, что в дробной части полученного частного повторяются одни и те же цифры: 45,45,45...

То есть  $\frac{5}{11} = 0,454545...$

Период (повторяющуюся комбинацию цифр после запятой) записывают в круглых скобках: 0,(45).

**Такую дробь называют бесконечной десятичной**

## периодической дробью.

Число 7 также можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби. Для этого надо в периоде записать число 0:

$$7 = 7,00000... = 7,(0).$$

Аналогичная ситуация с числом 4,244:

$$4,244 = 4,244000... = 4,244(0).$$

Принято считать, что: 4,244 — конечная десятичная дробь, а 4,244000... — бесконечная десятичная дробь.

**Как видим, у некоторых дробей десятичные знаки повторяются**

$$0,5555 \dots; \quad 0,3333 \dots; \quad 4,5222 \dots;$$

Такие числа называются периодическими десятичными дробями и записываются:

$$4,959595 \dots = 4, (95)$$

$$2,125125125 \dots = 2, (125)$$

$$0,5121212 \dots = 0,5 (12)$$

$$2,13444 \dots = 2,13 (4)$$

Каждая бесконечная периодическая дробь представляет собой рациональное число:

$$4, (95) = 4 \frac{95}{99};$$

$$1,83(4) = 1 \frac{834 - 83}{900} = 1 \frac{751}{900};$$

$$0, (5) = \frac{5}{9};$$

$$0,5(19) = \frac{519 - 5}{990} = \frac{514}{990} = \frac{257}{495}$$

$$3, (421) = 3 \frac{421}{999}$$

для чисто периодической дроби: в числителе пишется число, стоящее в периоде, а в знаменателе столько "9", сколько цифр в периоде, целая часть остается без изменения.

для смешанной периодической дроби: в числителе разность между числом, стоящим после запятой, и числом, стоящим после запятой до периода, а в знаменателе столько "9", сколько цифр в периоде, со столькими "0", сколько цифр после запятой до периода.

**Таким образом, множество рациональных чисел — это множество всевозможных десятичных бесконечных периодических дробей.**

**Всякое рациональное число представимо в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной десятичной периодической дроби.**

**Верно и обратное: всякая бесконечная десятичная периодическая дробь представима в виде обыкновенной дроби.**

### **Вычисление заданий с дробями.**

Запишите в виде обыкновенной дроби:

$$5,21(3) = 5 \frac{213-21}{900} = 5 \frac{192}{900}; \quad 13,(71) = 13 \frac{71}{99}; \quad 14,72(24) = 14 \frac{7224-72}{9900} = 14 \frac{7152}{9900};$$

$$0,(4) = \frac{4}{9}; \quad 0,7(125) = \frac{7125-7}{9990} = \frac{7118}{9990}; \quad 10,(125) = 10 \frac{125}{999}.$$

### **Действительные числа.**

Числа, представляющие собой бесконечные непериодические десятичные дроби, называются иррациональными:

$$\begin{array}{lll} 4,1728 \dots & 0,1078612 \dots & 13,200941 \dots \\ \sqrt{3} = 1,7321\dots & \sqrt{2} = 1,41\dots & \pi = 3,14\dots \\ e \approx 2,718\dots (\text{число Непера}) & & \end{array}$$

Пример:

представьте в виде обыкновенной дроби

а)  $1,(47)$ ;    б)  $1,3(47)$ .

Решение

а) Обозначим  $x=1,(47)$ , т. е.  $x = 1,474747\dots$

Чтобы запятая сместилась на один период вправо, умножим число  $x$  на 100.

Получим:

$$100x = 147,474747\dots$$

Следовательно,

$$100x = 147,474747\dots$$

$$x = 1,474747\dots$$

---

$$100x - x = 147,474747\dots - 1,474747\dots$$

$$99x = 146;$$

$$x = \frac{146}{99}.$$

$$\text{Итак, } 1,(47) = \frac{146}{99} = 1\frac{47}{99}.$$

б)  $1,3(47)$ .

Введем обозначение: пусть  $x=1,3(47)=1,3474747\dots$ ;

необходимо получить число, в котором период начинается сразу после запятой.

Для этого умножим  $x$  на 10:  $10x=13,474747\dots$ ; чтобы запятая сместилась на один период вправо, умножим число  $10x$  на 100:

$$1000x=1347,474747\dots$$

Получим:

$$\begin{array}{r} _{1000x=1347,474747\dots} \\ 10x=13,474747\dots \\ \hline \end{array}$$

$$990x=1334;$$

$$x = \frac{1334}{990} = \frac{667}{495} = 1 \frac{172}{495}.$$

## Иррациональные числа

Числа, которые не являются рациональными, то есть не являются ни целыми, ни представимыми в виде дроби вида  $\frac{m}{n}$ , где  $m$  — целое число, а  $n$  — натуральное, называются иррациональными.

Также можно сказать, что иррациональным числом называют бесконечную десятичную непериодическую дробь.

Пример:

$$0,547\dots \quad 557505\dots \quad 113456\dots$$

Иррациональные числа можно встретить, извлекая квадратный и кубический корень:

$$\sqrt{3}=1,732050\dots \text{ — иррациональное число,}$$

$$\sqrt[3]{7}=1,912931\dots \text{ — иррациональное число.}$$

Одним из известных и часто используемых в математике иррациональных чисел является  $\pi$ ; чтобы его получить, нужно длину любой окружности разделить на её диаметр, и получится:

$$\pi = 3,141592\dots$$

Любая арифметическая операция над рациональными числами (кроме деления на 0) в результате приводит к рациональному числу.

С иррациональными числами же всё не так просто, может получиться как рациональное, так и иррациональное число.

Пример:

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$  — рациональное число,

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$  — иррациональное число.

*Действительное число – это бесконечная десятичная дробь.*

*Множество  $R$  всех действительных чисел по определению состоит из множества всевозможных десятичных дробей (конечных, бесконечных периодических и бесконечно непериодических).*

Множество всех действительных чисел обозначается буквой  **$R$** :

**$N \subset Z \subset Q \subset R$**