**Тема 1.1 Развитие понятия о числе**

**1.Действительные числа**

* 1. **Числовые множества**

|  |  |
| --- | --- |
| **N** – множество натуральных чисел | **R –** множество всех  действительных чисел |
| **Z** – множество целых чисел |
| **Q** – множество рациональных чисел |
| **I** – множество иррациональных чисел |

* 1. **Рациональные числа**

***Обыкновенные дроби.***

*Обыкновенная дробь* – это число вида , где *m* и *n* – натуральные числа. Число *m* называется числителем дроби, *n* – знаменателем.

*Всякое натуральное число можно представить в виде обыкновенной дроби со знаменателем 1.*

Дробь называется *правильной*, если её числитель меньше знаменателя, и *неправильной*, если её числитель больше знаменателя или равен ему.

*Основное свойство дроби*: если числитель и знаменатель данной дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной.

***Десятичные дроби*.**

*Десятичная дробь* **–** это любая числовая дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1000 и вообще 10n .

В виде десятичной дроби можно представить любую обыкновенную дробь, знаменатель которой является делителем некоторой степени числа 10.

Десятичная запись — это форма записи десятичных дробей, где целая часть отделяется от дробной с помощью обычной точки или запятой. При этом сам разделитель (точка или запятая) называется десятичной точкой.

Бесконечная десятичная дробь **–** после запятой содержится бесконечно много десятичных знаков.

Теорема. Любую обыкновенную дробь можно представить в виде бесконечной десятичной дроби.

Последовательно повторяющаяся группа цифр (минимальная) после запятой в десятичной записи числа называется периодом, а бесконечная десятичная дробь, имеющая такой период в своей записи, называется периодической. Для краткости принято период записывать один раз, заключая его в круглые скобки:

0,2121…= 0,(21) – чистая периодическая дробь, так как период начинается сразу после запятой;

2,3454545…= 2,3(45); 2, 73 = 2,73000…= 2,73(0) – смешанные периодические дроби, так как между запятой и периодом есть другие десятичные знаки.

Правило перевода бесконечной периодической дроби в обыкновенную.

Чтобы обратить периодическую дробь в обыкновенную, надо из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и записать эту разность числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и после девяток дописать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Пример.

0,(45) = ; 3,1(73) = .

Задание для самостоятельной работы.

Обратить периодическую дробь в обыкновенную:

1. 0,(3); 2) 0,2(1); 3) 0,2(19); 4) 3,(73); 5) 2,2(41).
   1. **Стандартный вид положительного действительного числа.**

Любое положительное число *a* можно представить в виде ∙ 10*n ,*

Где , а *n* – целое число.

Показатель *n* называют *порядком числа*.

Примеры.

*а = 395 = 3,95∙102;*

*а = 4,13 = 4,13∙100;*

*а = 0,0023 = 2,3∙10-3.*

* 1. **Приближённые значения чисел. Абсолютная и относительная погрешности.**

При округлении десятичной дроби до какого-нибудь разряда все следующие за этим разрядом цифры заменяют нулями, а если они стоят после запятой, то их отбрасывают.

Если первая следующая за этим разрядом цифра *больше или равна пяти*, то последнюю оставшуюся цифру *увеличивают на 1*.

Если же первая следующая за этим разрядом цифра *меньше 5*, то последнюю оставшуюся цифру *не изменяют*.

*Примеры округления чисел:*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 6,527 → 6,5 | 2,195 → 2,2 | 0,950 → 1,0 | 0,850 → 0,8 |
| 0,456 → 0,5 | 1,450 → 1,4 | 4,851 → 4,9 | 0,05 → 0,0 |

***Задание.***

1.Округлить числа:

- до единиц – 965,049;

- до десятых – 348,645;

- до целых – 770,357;

- до сотых – 2953,697;

- до единиц тысяч – 1536,728.

**2.** Сколько потребуется автомашин для перевозки 3,25 тонн груза, если одна машина может взять не более 1 тонны

Приближённые значения появляются не только при округлении чисел. Чаще они возникают при различных измерениях (длин, масс, температур и т.д.). При этом важно знать, с какой точностью выполнено измерение.

Пусть ***а*** – приближённое значение числа .

*Абсолютной погрешностью* приближенного значения числа называется модуль разности чисел и ***а***, то есть .

*Относительной погрешностью* приближенного значения называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближённого значения. Относительную погрешность обычно выражают в процентах, то есть

100%

*Пример.* Взвесив кондитерское изделие, масса которого равна 54,12705 г, на весах с ценой деления шкалы 0,1 г, получили приближённое значение массы 54,1 г. Найти абсолютную и относительную погрешности этого приближённого значения.

*Решение.*

1. = (абсолютная погрешность);
2. 100% = 100% = 0,05% (относительная погрешность).

Если абсолютная погрешность приближённого значения ***а***, найденного для интересующего числа , не превосходит некоторого числа ***h***, то пишут ; говорят, что ***а*** – приближённое значение числа *с точностью до* ***h***.

* 1. **Десятичные приближения действительного числа по недостатку и по избытку.**

Любое действительное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби, причём *периодической*, если число *рациональное*, и *непериодической*, если число *иррациональное*.

*Пример.*

– десятичное приближение числа с точностью до 0,001 по недостатку;

– десятичное приближение числа с точностью до 0,001 по избытку;

**2. Задачи на проценты, растворы и концентрацию**

* 1. **Проценты**

***Процент*** –это сотая часть от числа.

* Чтобы ***перевести* *проценты в дробь***, нужно убрать знак % и разделить число на 100.
* Чтобы перевести десятичную дробь в проценты, нужно дробь умножить на 100 и добавить знак %. (0,14 = 0,14·100% = 14%)
* Чтобы ***перевести обыкновенную дробь в проценты***, нужно сначала превратить её в десятичную дробь. (

**Перевод дробей в проценты.**

Проценты тесно связаны с обыкновенными и десятичными дробями. В повседневной жизни нужно знать о числовой связи дробей и процентов.

**1 = 100%**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Дробь |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Десятичная дробь | 0,5 | 0,25 | 0,75 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,1 | 0,05 | 0,02 |
| Проценты | 50% | 25% | 75% | 20% | 40% | 60% | 10% | 5% | 2% |

***Полезные формулы:***

* если величину ***х*** увеличить на ***р*** процентов, получим ;
* если величину ***х*** уменьшить на ***р*** процентов, получим ;
* если величину ***х*** увеличить на ***р*** процентов, а затем уменьшить на ***q*** процентов, получим ;
* если величину ***х*** дважды увеличить на ***р*** процентов, получим ;
* если величину ***х*** дважды уменьшить на ***р*** процентов, получим .
  1. ***Три основных типа задач на проценты*:**

|  |  |
| --- | --- |
| *Задача 1.* | *Найти указанный процент от заданного числа.* Заданное число умножается на указанное число процентов, а затем произведение делится на 100. |

|  |  |
| --- | --- |
| Пример. | Вклад в банке имеет годовой прирост 6%. Начальная сумма вклада равнялась 10000 руб. На сколько возрастёт сумма вклада в конце года? |

 Решение:   10000 · 6 : 100 = 600 руб.

|  |  |
| --- | --- |
| *Задача 2.* | *Найти число по заданному другому числу и его величине в процентах от искомого числа.*  Заданное число делится на его процентное выражение и результат умножается на 100. |

|  |  |
| --- | --- |
| Пример. | Зарплата в январе равнялась 1500 руб., что составило 7,5% от годовой зарплаты. Какова была годовая зарплата? |

 Решение:   1500 : 7,5 · 100 = 20000 руб.

|  |  |
| --- | --- |
| *Задача 3.* | *Найти процентное выражение одного числа от другого.*  Первое число делится на второе и результат умножается на 100. |

|  |  |
| --- | --- |
| Пример. | Завод произвёл за год 40000 автомобилей, а в следующем году –  только 36000 автомобилей. Сколько процентов это составило по отношению к выпуску предыдущего года? |

 Решение:   36000 : 40000 · 100 = 90% .

**2.3 Задачи на растворы и концентрацию.**

*Концентрация раствора* - это часть, которую составляет масса растворённого вещества от массы всего раствора.

Задача 1. Килограмм соли растворили в 9 л воды. **Чему равна концентрация полученного раствора**? (Масса 1 л воды составляет 1 кг)

*Решение.*

1 кг - масса растворённого вещества (соли);

9 кг - масса воды в растворе (не путать с общей массой раствора);

9 + 1 = 10 кг - общая масса раствора;

*Ответ*: 10%

Задача 2. Сколько соли получится при выпаривании 375 граммов 12%-го раствора?

*Решение.*

Чтобы найти массу выпаренной соли из раствора, умножим общую массу раствора на процент концентрации. Не забудем предварительно перевести процент в десятичную дробь.

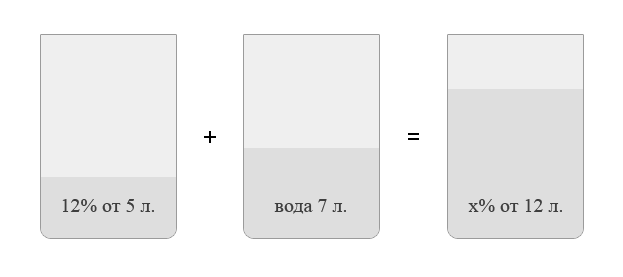
1. 12% = = 0,12;
2. 375 · 0,12 = 45 (г).

*Ответ*: 45 граммов соли.

*Задача 3.* В сосуд, содержащий  5 литров 12–ти процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

*Решение.*

В решении подобных задач помогает картинка. Изобразим сосуд с раствором схематично — так, как будто вещество и вода в нем не перемешаны между собой, а отделены друг от друга, как в коктейле. И подпишем, сколько литров содержат сосуды и сколько в них процентов вещества. Концентрацию получившегося раствора обозначим ***х***.



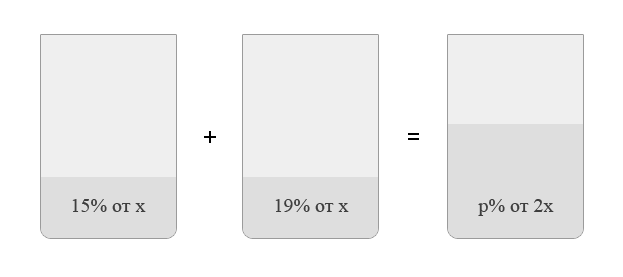
Первый сосуд содержал 0,12 · 5 = 0,6 литра вещества. Во втором сосуде была только вода. Значит, в третьем сосуде столько же литров вещества, сколько и в первом, составим уравнение: 0,12 · 5 = ·12; *x =* 5 (%).

*Ответ:*5%.

*Задача 4.* Смешали некоторое количество 15-ти процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 19-ти процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

*Решение.*

Пусть масса первого раствора равна *х*. Масса второго — тоже *х*. В результате получили раствор массой 2*х*. Рисуем картинку.



0,15*х +* 0,19*х =* 0,34*х =* 0,17· 2*х*

0,17 = 17%

*Ответ:* 17%

*Задача 5.* Виноград содержит 90% влаги, а изюм — 5%. Сколько килограммов винограда требуется для получения  20 килограммов изюма?

*Решение.*

***Внимание!*** Если вам встретилась задача «о продуктах», то есть такая, где из винограда получается изюм, из абрикосов урюк, из хлеба сухари или из молока творог — знайте, что на самом деле это задача на растворы. Виноград мы тоже можем условно изобразить как раствор. В нем есть вода и «сухое вещество». У «сухого вещества» сложный химический состав, а по его вкусу, цвету и запаху мы могли бы понять, что это именно виноград, а не картошка. Изюм получается, когда из винограда испаряется вода. При этом количество «сухого вещества» остается постоянным. В винограде содержалось 90% воды, значит, «сухого вещества» было 10%. В изюме  5% воды и  95% «сухого вещества». Пусть из

*х* кг винограда получилось  20 кг изюма. Тогда 10% от *х* = 95% от 20.

Составим уравнение:

0,1 *х* = 0,95· 20; 0,1 *х* = 19; *х* = 190 (кг)

*Ответ:* 190 кг.

*Задача 6.* Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

*Решение.*

Пусть масса первого раствора *х*, масса второго равна *у*. Масса получившегося раствора равна *х + у + 10*. Запишем два уравнения, для количества кислоты.

Решаем получившуюся систему. Сразу умножим обе части уравнений на 100, поскольку с целыми коэффициентами удобнее работать, чем с дробными. Раскроем скобки.

; у = 30.

*Ответ:* 60 кг.

**3. Комплексные числа**

* 1. **Понятие о мнимых и комплексных числах.**

Для решения многих задач физики, электротехники и других наук оказалось недостаточно множества действительных чисел. В связи с этим возникла потребность нового расширения понятия числа.

*Комплексными числами* называются числа вида , где *a* и *b –* действительные числа, а число *i*, определяемое равенством *i2 = -1,* называется *мнимой единицей*.

Два комплексных числа и называются равными, если *a*1 = *a2*  и *b1 = b2*.

Запись комплексного числа в виде называется *алгебраической формой* записи комплексного числа, где *a* – *действительная часть* комплексного числа, а *b1 – мнимая часть.*

Два комплексных числа называются *взаимно сопряжёнными* (обозначаются *z* и ), если их *действительные части равны*, а *мнимые отличаются знаками*. Например, числу сопряжённым будет число , числу сопряжённым будет число .

Комплексные числа вида и называются *противоположными.*

Множество комплексных чисел обозначается буквой ***С***. Множество действительных чисел *R* содержится в множестве комплексных чисел: ***R*** , следовательно, ***N Z Q R .***

* 1. **Геометрическая интерпретация комплексных чисел.**

Комплексное число можно изобразить точкой плоскости с координатами *(a; b)*. Плоскость *xOy*, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью* (рис 1.). При этом *действительные числа* изображаются *точками оси абсцисс*, которую называют *действительной осью*, а чисто *мнимые числа* – *точками оси ординат*, которую называют *мнимой осью.*

*у*

*M(a;b)*

*b*

О *a* *х Рис.1*

Любое комплексное число единственным способом определяется его действительной и мнимой частями. *Каждому комплексному числу* в комплексной плоскости *соответствует единственная точка* *М(a; b)*, и, обратно, *каждой точке* *(a; b)* плоскости *xOy* *соответствует единственное* *комплексное число*. Например, число изображается точкой *М(3;2). Сопряжённые числа расположены симметрично* относительно *действительной оси*.

Комплексное число можно геометрически изобразить в виде вектора с началом в точке О(0;0) и концом в точке *М(a; b).*

*Модулем* комплексного числа называется действительное число *Модуль комплексного числа* называется также *абсолютной величиной* этого числа.

*Пример.*

Найти модули комплексных чисел и

*Решение:*

= = = = = 5;

= = = = .

Из геометрической интерпретации комплексных чисел вытекают следующие свойства:

1. **Длина вектора равна .**
2. **Точки и симметричны относительно действительной оси.**
3. **Точки *z* и *-z* симметричны относительно точки О.**
4. **Число геометрически изображается вектором, построенным по правилу сложения векторов (правилу параллелограмма), соответствующих точкам (рис.2).**
5. **Расстояние между точками и равно .**

*у*

О *х Рис.2*

***3.3 Арифметические действия над комплексными числами.***

1. + = + .
2. – = + .
3. • *= ac + bci* + *adi – bd =* .
4. *= =*  +  *i* ,  *c + di ≠* 0.

**ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ**

1. Какие числа называются натуральными? Какое обозначение введено для множества натуральных чисел?

2. Какие числа входят в множество целых чисел? Какое обозначение принято для этого множества?

3. Какое множество называется множеством рациональных чисел и как это множество обозначается?

4. Перечислите основные законы действий над рациональными числами.

5. Какие обыкновенные дроби обращаются в конечные десятичные?

6. Какие обыкновенные дроби выражаются только приближенными десятичными?

7. Какие десятичные дроби называются бесконечными периодическими?

8. Что называется периодом бесконечной периодической десятичной дроби?

9. Какие периодические дроби называются чистыми и смешанными и как сокращенно они записываются?

10. Как записываются целые числа и конечные десятичные дроби в виде бесконечных периодических дробей?

11. Любая ли бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным

числом?

12. Как обратить чистую периодическую десятичную дробь в обыкновенную?

13. Как обратить смешанную периодическую десятичную дробь в обыкновенную?

14. Какое исключение представляет собой бесконечная периодическая десятичная

дробь с периодом 9?

15. Какие числа называются иррациональными и как обозначается множество иррациональных чисел?

16. Какие числа называются действительными и какое для них введено

обозначение?

17. Что понимается под абсолютной величиной действительного числа?

18. Почему нельзя делить на нуль?

19. Какие числа называются комплексными и мнимыми?

20. Как геометрически представляется комплексное число?

21. Что называется модулем комплексного числа?

22. Как выполняется сложение и вычитание комплексных чисел?

23. Как геометрически представляется сумма двух комплексных чисел?

24. Как выполняется умножение комплексных чисел?

25. Как выполняется деление комплексных чисел?

26. Как выполняется возведение в степень мнимых и комплексных чисел?

**Практическое занятие №1.**

**Тема 1.1 Развитие понятия о числе.**

**1 ВАРИАНТ.**

1. Запишите число в стандартном виде:

а)730000000; б)0,0000025;

в)0,24 ∙10-3; г)75,2∙104.

1. Представьте обыкновенную дробь в виде десятичной периодической дроби:

а)  б) 

3. Обратите чистые периодические десятичные дроби в обыкновенные:

а) 0,(42); б) 0,(513).

1. Обратите смешанные периодические десятичные дроби в обыкновенные дроби:

а) 0,0(27); б) 0,0(01).

5. Округлить число 2, 45721 до сотых долей, найти абсолютную и относительную погрешности.

6. Найдите сопряжённое число комплексному числу:

*z= 4 + 5i*.

7. Даны числа *z1= - 1 +3i* и *z2= 4 + 5i*.

Вычислите:

а) модули чисел z1  и z2;

б) сумму чисел z1  и z2;

в) разность чисел z1  и z2;

г) произведение чисел z1  и z2.

8. Найдите значение дроби:



9. Решите задачу.

Игрушка стоила 300 рублей. Эта сумма была снижена на 15%, а через некоторое время новая цена была снижена на 10%. Сколько стала стоить игрушка после второго снижения?

10. Решить задачу.

В один стакан чая положили 3 чайные ложки сахара. Масса чая в стакане 200г, масса сахара в одной ложке 12г. Какова концентрация сахара в чае?

11. Решите задачу.

К 20% соляному раствору добавили 50 г соли, после чего концентрация раствора стала равной 60%. Найдите первоначальный вес раствора в граммах.

12. Решите задачу.

Флакон шампуня стоит 140 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет

18 %?

**2 ВАРИАНТ.**

1. Запишите число в стандартном виде:

а) 37000000; б)0,00000052;

в) 0,42∙10-4; г)52,7∙105.

1. Представьте обыкновенную дробь в виде десятичной периодической дроби:

а)  б) 

3. Обратите чистые периодические десятичные дроби в обыкновенные:

а) 0,(72); б) 0,(918).

4. Обратите смешанные периодические десятичные дроби в обыкновенные дроби:

а) 0,3(6); б) 0,11(6).

5. Округлить число 45,36293 до десятых долей, найти абсолютную и относительную погрешности.

6. Найдите сопряжённое число комплексному числу:

*z= 4 -7i.*

7. Даны числа *z1= - 3 +5i* и *z2= 4 -7i*.

Вычислите:

а) модули чисел z1  и z2 ;

б) сумму чисел z1  и z2;

в) разность чисел z1  и z2;

г) произведение чисел z1  и z2.

8. Найдите значение дроби:



9. Решите задачу.

Игрушка стоила 400 рублей. Эта сумма была снижена на 20%, а через некоторое время новая цена была снижена на 15%. Сколько стала стоить игрушка после второго снижения?

10. Решить задачу.

В один стакан чая положили 2 чайные ложки сахара. Масса чая в стакане 200г, масса сахара в одной ложке 13г. Какова концентрация сахара в чае?

11. Решите задачу.

К 30% раствору соляной кислоты добавили 60 г чистой кислоты, после чего концентрация раствора стала равной 70%. Найдите первоначальный вес раствора в граммах.

12. Решите задачу.

Флакон шампуня стоит 120 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет

16 %?