

## «Решение неравенств, уравнений, систем уравнений методом областей»

Для решения многих неравенств широко используется метод интервалов.

Для успешного исследования многих задач повышенной трудности старшеклассник должен уметь строить не только графики функций, но и изображать на плоскости множества точек, координаты которых удовлетворяют заданным уравнениям, неравенствам или их системам. Эффективно строить на координатной плоскости такие множества позволяет метод областей. Это весьма полезный прием, в некотором смысле обобщающий метод интервалов. Его еще называют иногда методом интервалов на плоскости.

Метод областей полезен и при решении уравнений или неравенств с параметром. Дело в том, что применение метода интервалов в таких случаях может быть затруднено, так как взаимное расположение точек, отмечаемых на числовой оси, может изменяться в зависимости от значений параметра. В этой ситуации может помочь метод областей.

В качестве иллюстрации рассмотрим несколько примеров, начав с анализа простейших неравенств на плоскости.

**Пример 1.** Указать множество точек плоскости  $(x; y)$ , удовлетворяющих условию  $|x| + |y| \leq 2$ .

**Решение.** Поскольку входящие в рассматриваемое неравенство переменные  $x$  и  $y$  могут принимать значения независимо друг от друга, то возможны четыре случая раскрытия модулей.

**Случай 1.** Пусть  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ . Тогда оба модуля раскрываются со знаком «+», и исходное неравенство в этом случае равносильно системе трех неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 2-x \end{cases}$$

Множеством решений этой системы на плоскости  $(x; y)$  служит часть первой четверти координатной плоскости, ограниченная отрезком прямой

$y = 2 - x$  и осями координат, включая эти границы, см. рис. 1.

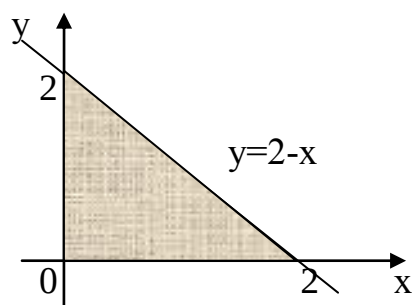


Рис. 1

**Случай 2.** Пусть  $x < 0$ ,  $y \geq 0$ . Тогда исходное неравенство равносильно системе трех неравенств

$$\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 2 + x \end{cases}$$

Аналогично случаю 1, множеством решений этой системы является часть второй четверти координатной плоскости, ограниченная отрезком прямой  $y = 2 + x$  и осями координат, включая этот отрезок и ось  $Ox$ , но исключая ось  $Oy$ . Множество показано на рис. 2.

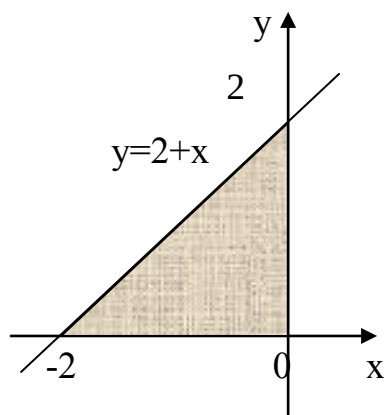


Рис. 2

**Случай 3.** Пусть  $x < 0$ ,  $y < 0$ . Тогда исходное неравенство равносильно системе трех неравенств.

$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ y \leq -2 - x \end{cases}$$

Множество решений этой системы представлено на рис. 3.

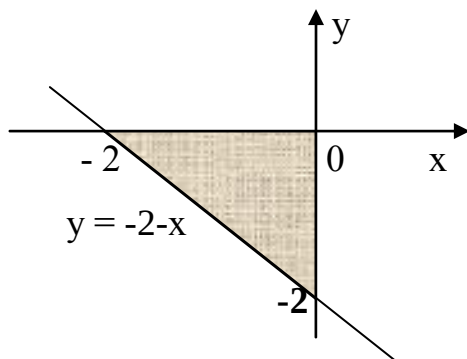


Рис. 3

**Случай 4.** Пусть  $x \geq 0$ ,  $y < 0$ . Тогда исходное неравенство равносильно системе трех неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ y \leq -2 + x \end{cases}$$

Множество решений этой системы представлено на рис. 4.

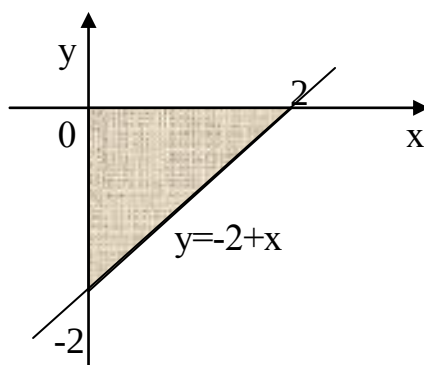


Рис. 4

Объединяя множества решений, соответствующие этим четырем случаям, получим фигуру, изображенную на рис. 5. Итак, искомое множество точек — квадрат (включая границы) со стороной  $2\sqrt{2}$  и вершинами, расположенными на координатных осях.

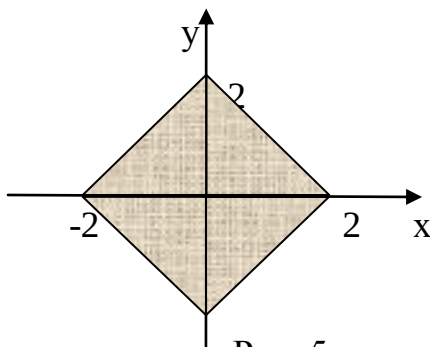


Рис. 5

**Замечание.** По моему мнению, не играет роли, в каких из четырех случаев взяты строгие или нестрогие неравенства для переменных  $x$  и  $y$ . Важно, чтобы каждая из точек плоскости была бы рассмотрена хотя бы один раз. Как и для метода интервалов, если какую-либо границу включить в два случая, результат не изменится.

Причину этого понять несложно: если подмодульное выражение равно нулю, то неважно, с каким знаком раскрывается средством самопроверки. Если в каком-либо случае раскрытия модулей некоторая точка границы является решением, то она должна быть решением и в случае раскрытия модулей для соседней области (если бы граница включалась).

**Пример 2.** Указать множество точек плоскости  $(x;y)$ , удовлетворяющих неравенству  $(y-2x)(y+x-1)\leq 0$ .

**Решение.** Данное неравенство равносильно объединению двух систем неравенств

$$\begin{cases} y-2x\leq 0 \\ y\geq 1-x \end{cases} \quad \begin{cases} y-2x\geq 0 \\ y\leq 1-x \end{cases}$$

Решением первой из этих систем является множество точек плоскости  $(x;y)$ , лежащих не выше прямой  $y=2x$ , но не ниже прямой  $y=1-x$ .

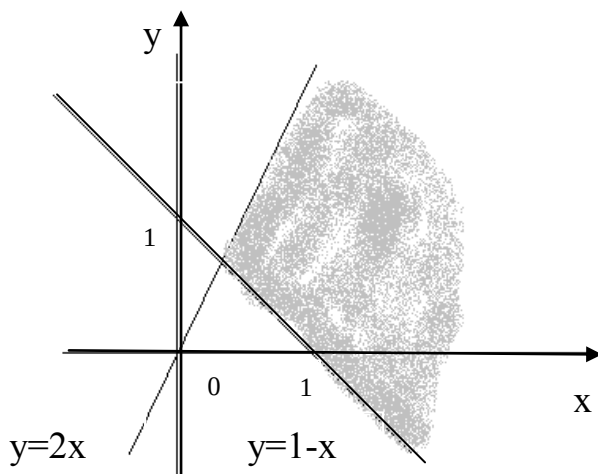


Рис. 6

Это множество отмечено на Рис. 6 штриховкой. Решением второй системы является множество точек, расположенных не ниже прямой  $y = 2x$ , но не выше прямой  $y = 1 - x$ . Это множество показано на Рис. 7. Множество точек, удовлетворяющих исходному неравенству, является объединением «углов», заштрихованных на Рис. 6 и 7.

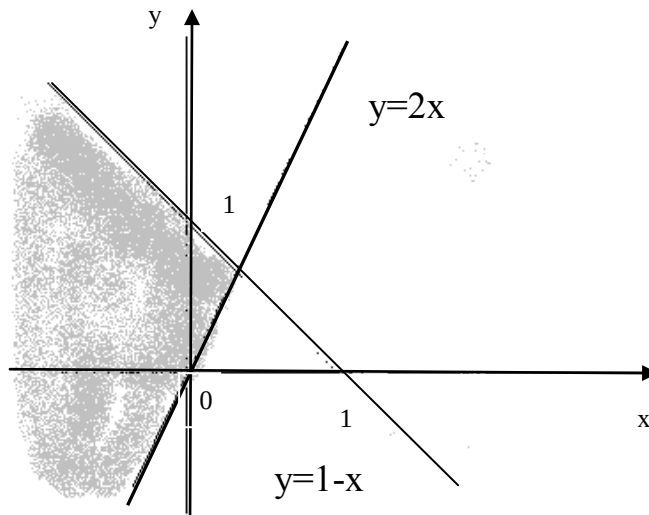


Рис. 7

Решим теперь эту задачу при помощи метода областей.

Обозначим левую часть исходного неравенства через  $f(x; y)$

$$f(x; y) = (y - 2x)(y + x - 1)$$

Найдем сначала множества точек плоскости  $(x; y)$ , для которых  $f(x; y)$  обращается в нуль. Эти множества описываются уравнениями  $y - 2x = 0$  и  $y + x - 1 = 0$ .

Эти уравнения определяют две прямые, которые разбивают координатную плоскость на четыре области, в каждой из которых функция  $f(x; y)$  не меняет своего знака. Поэтому для определения знака  $f(x; y)$ , например, в области I, см. рис. 8, достаточно найти знак этой функции в какой-нибудь (любой) точке из этой области.

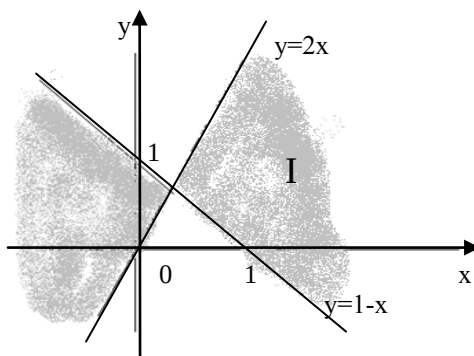


Рис. 8

Подставим точку с координатами  $(1;1)$  в выражение для рассматриваемой функции

$$f(1;1)=(1-2)(1+1-1)=1<0$$

Следовательно, исходное выражение во всех точках области I отрицательно.

Аналогичным образом определяются знаки функции  $f(x;y)$  во всех остальных областях.

Советую проделать это самостоятельно. Ответом задачи является Рис.9.

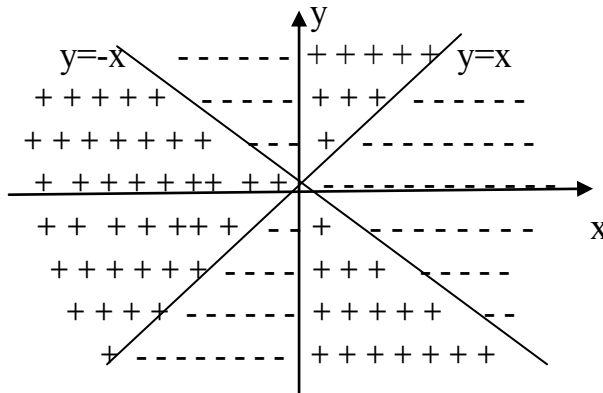


Рис. 9

**Пример 3.** Указать множество точек плоскости  $(x;y)$ , удовлетворяющих неравенству  $xy^2 - x^3 \leq 0$

**Решение.** Разложим левую часть неравенства на множители, обозначим ее  $f(x; y)$

$$f(x; y) = x(y-x)(y+x)$$

Множество точек на плоскости  $(x;y)$ , где  $f(x; y)$  равно нулю, задается уравнениями

$$x=0, y=x, y=-x$$

Эти уравнения определяют три прямые, разбивающие всю плоскость на шесть областей, в каждой из которых функция  $f(x; y)$  знакопостоянна. Чтобы расставить знаки, найдем знак функции, например, в точке с координатами  $(1;0)$

$$f(1;0)=1(0-1)(0+1)<0.$$

Заметим, что все прямые «порождены» сомножителями, входящими в функцию  $f(x; y)$  нечетным образом, и при переходе через любую из прямых происходит смена знака функции. В других областях знаки  $f(x;y)$  чередуются. Ответ показан на Рис. 9.

**Пример 4.** Указать множество точек плоскости  $(x,y)$ , удовлетворяющих неравенству  $x^2y^2 - x^4 \leq 0$

**Решение.** Разложим левую часть неравенства на множители и обозначим

$$f(x;y) = x^2(y-x)(y+x)$$

Функция обращается в нуль, если  $x=0$ , или  $y=x$ , или  $y=-x$ .

Это три прямые, разбивающие плоскость на шесть областей, в каждой из которых функция  $f(x; y)$  знакопостоянна. В отличие от примера 3 при переходе через прямую  $x=0$  знак функции  $f(x; y)$  не меняется, т.к. соответствующий ей сомножитель входит в выражение для  $f(x; y)$  чётным образом. Правило чередования знаков для метода областей такое же, как и для метода интервалов! Результат показан на Рис.10.

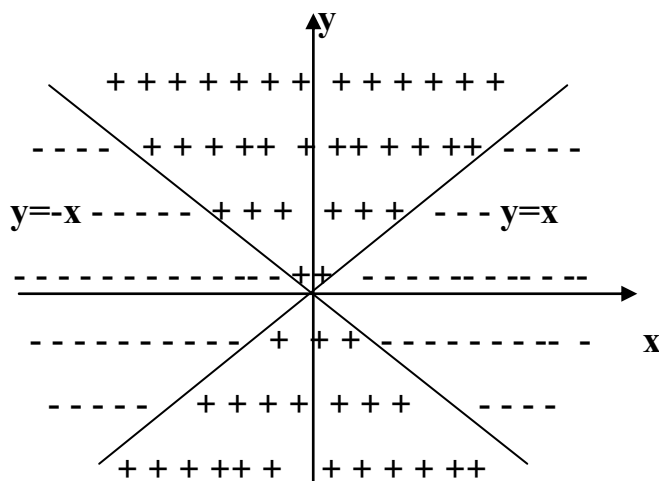


Рис. 10

**Пример 5.** Указать множество точек плоскости  $(x; y)$ , удовлетворяющих неравенству  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 4$ .

**Решение.** Обозначим  $f(x; y) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 - 4$ . Множество точек, для которых  $f(x; y) = 0$ , описывается уравнением  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$ .

Оно задает окружность радиуса 2 с центром в точке  $(1; -1)$ . Окружность разбивает плоскость на две области: одна из них лежит внутри окружности, а другая - снаружи. Конечно, даже троечник может теперь вспомнить, что искомое множество - круг радиуса 2 с центром в точке  $(1; -1)$ .

Но мы все-же завершаем решение данной задачи методом областей. Вычисляем знак  $f(x; y)$  в центре окружности (удобнее не придумаешь!)

$$f(1; -1) = -4 < 0.$$

Итак, внутри окружности функция  $f(x; y)$  отрицательна, вне ее — положительна. Рисунок сделайте сами.

**Пример 6.** Указать множество точек плоскости  $(x; y)$ , удовлетворяющих неравенству  $(x - y)(x - y^2 + 1) > 0$ .

**Решение.** Пусть  $f(x; y) = (x-y)(x-y^2+1)$ .

Линии, на которых  $f(x; y)$  обращается в нуль, задаются уравнениями

$$x-y=0 \text{ и } x-y^2+1=0.$$

Первое из уравнений определяет прямую, второе - параболу, ось симметрии которой совпадает с осью абсцисс, см. Рис. 11. Прямая и парабола разбивают плоскость на пять областей, в каждой из которых функция  $f(x, y)$  знакопостоянна. Для определения знака  $f(x; y)$ , например, в области I, вычислим ее знак в точке с координатами  $(1;0)$

$$f(1;0)=(1-0)(1-0^2+1)=2>0$$

Следовательно, исходное выражение во всех точках области I положительно. Аналогичным образом определяются знаки функции  $f(x, y)$  во всех остальных областях. Советую Вам проделать это самостоятельно. Ответом задачи является Рис.12.

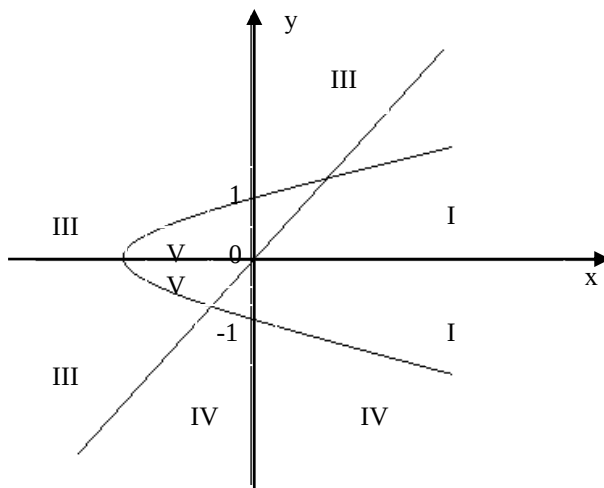


Рис. 11

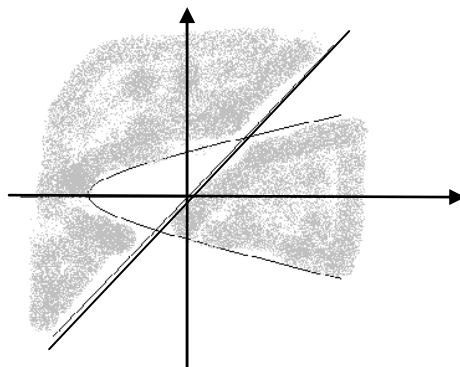


Рис. 12

При использовании метода областей следует изображать на плоскости не только те линии, на которых один из сомножителей обращается в нуль. Точно так



же, как в методе интервалов, надо рассматривать и линии (если таковые имеются), на которых рассматриваемое выражение не определено. При переходе через такую линию знак выражения тоже может измениться.

**Пример 7.** Указать множество точек плоскости  $(x; y)$ , удовлетворяющих неравенству  $\frac{x+y}{x-y} > 1$

**Решение.** Преобразуем неравенство, получим  $\frac{2y}{x-y} > 0$ .

Изобразим на плоскости  $(x; y)$  линию  $y=0$ , где дробь равна нулю, и линию  $y=x$ , где левая часть неравенства не определена, см. рис. 13, и расставим знаки в получившихся областях.

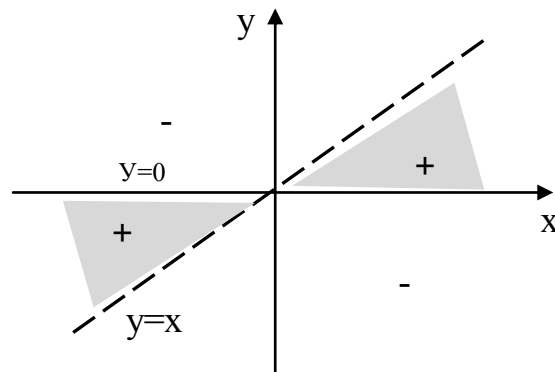


Рис.13

**Пример 8.** Указать множество точек плоскости  $(x; y)$ , удовлетворяющих неравенству  $\operatorname{tg}(x-y) > 1$ .

**Решение** Левая часть рассматриваемого неравенства равна 1 или не определена соответственно при условиях

$$(x-y) = \frac{\pi}{4} + \pi n \text{ и } (x-y) = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

Поэтому на плоскости следует изобразить два семейства линий

$$y = x - \frac{\pi}{4} + \pi n \quad y = x - \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z},$$

Расставим знаки, получим искомое множество, см. рис. 14.

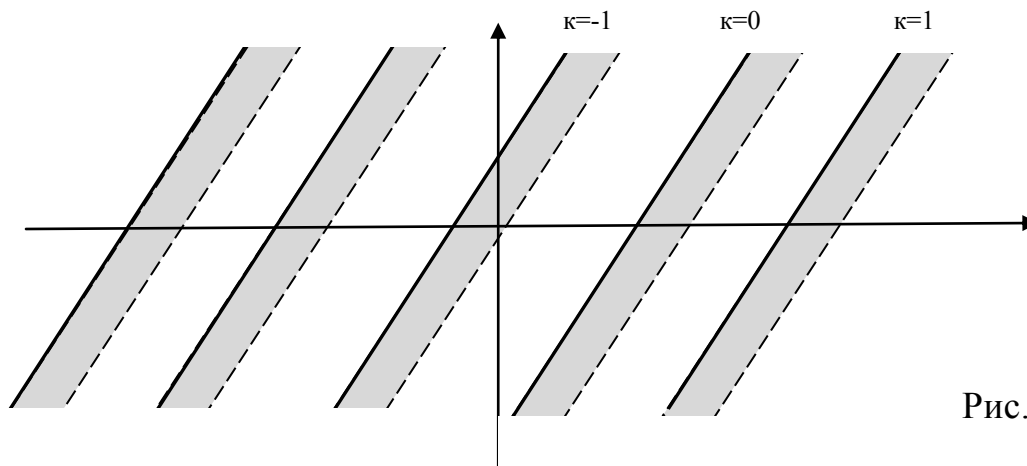


Рис.14

Метод областей успешно используется и для анализа решений систем неравенств в том случае, когда решение каждого из неравенств легко может быть изображено на плоскости  $(x; y)$  - в этом случае следует выбрать пересечение решений каждого из неравенств системы.

**Пример 9.** Указать множество точек плоскости  $(x; y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \leq -x^2 + x + 2 \\ 2y \geq 2x - x^2 \end{cases}$$

**Решение.** Изобразим отдельно решение каждого из неравенств. Получим области, показанные на рисунках 15 и 16

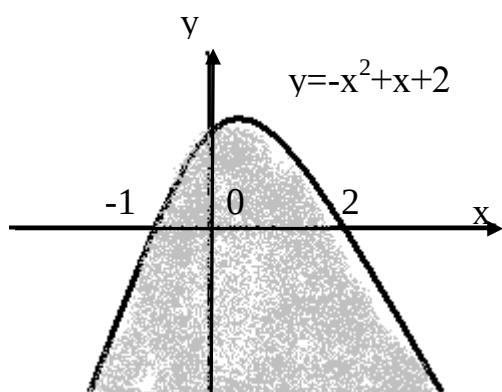


Рис.15

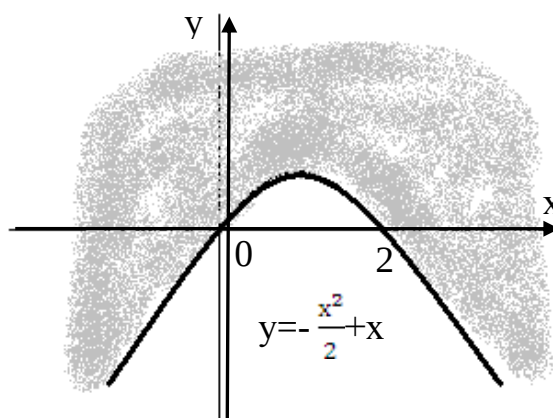


Рис. 16

Для завершения решения задачи необходимо объединить эти рисунки и заштриховать лишь ту область на плоскости  $(x; y)$ , где выполнены оба неравенства одновременно. Решение системы показано на рис. 17.

Вновь коснемся вопроса о правильном оформлении экзаменационной работы. Картинка, нарисованная при использовании метода областей - лишь иллюстрация.

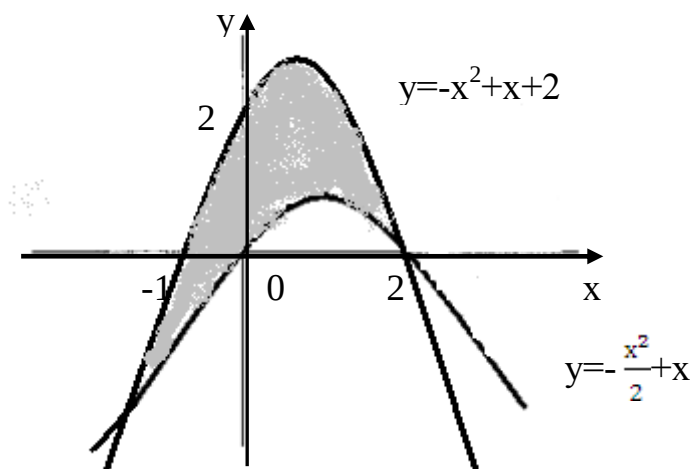


Рис. 17

Решение может считаться обоснованным, только если получены и выписаны уравнения всех линий, изображенных на рисунке, и приведены доказательства правильности расстановки знаков. Рисунок, естественно, должен быть выполнен по возможности аккуратнее. В частности, желательно указать, какие линии входят в рассматриваемое множество, а какие - нет.

Для этой цели обычно используются два приема. Первый – линии, входящие в рассматриваемое множество, рисовать сплошными, а не входящие – пунктиром, как это сделано на рис.18.

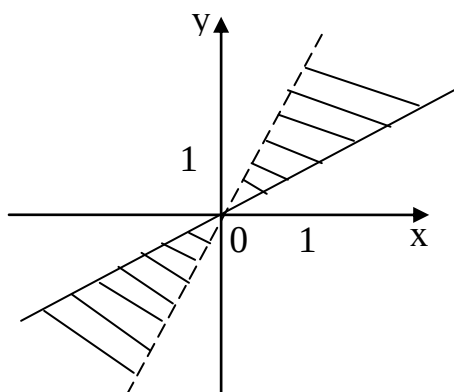


Рис.18

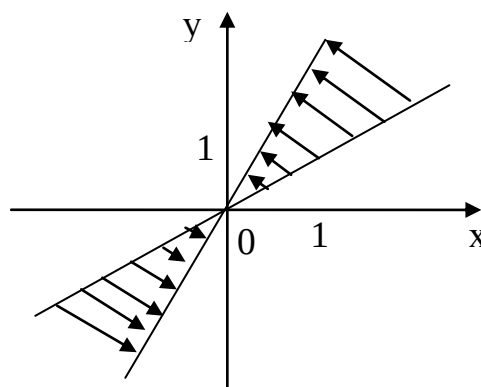


Рис. 19

Другой вариант - указывать исключаемые линии стрелками, как показано на рис. 19.

К сожалению, оба способа имеют недостатки. В частности, если

рисунок достаточно сложен, то и пунктир, и дополнительные стрелки, могут излишне загромоздить его, сделать трудным для понимания. Поэтому иногда авторы учебников считают возможным предложить другой способ, одновременно обеспечивающий и большую строгость решения.

Полезно около каждой изображаемой на рисунке линии записывать ее уравнение, причем уравнение исключаемой линии можно взять, например, в круглые скобки, пояснив это обозначение в решении, см. рис. 20.

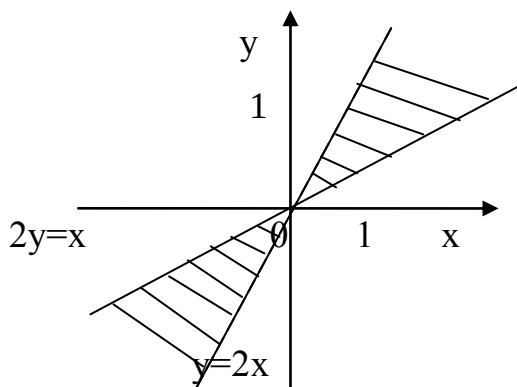


Рис. 20

Таким оформлением Вы подчеркиваете, что все получаемые Вами результаты (координаты точек, пределы изменения переменных, площади и т. д.) являются строгими и находятся алгебраическим путем - как точки пересечения линий, заданных известными уравнениями, решения соответствующих систем и т. д.

Если есть возможность, начертите включаемые и исключаемые линии, а также оси координат, разными цветами, Это усилит наглядность рисунка и, не исключено, избавит Вас от случайной ошибки. Не забудьте сделать подробное пояснение к рисунку. Обязательно укажите, какой смысл имеет каждый использованный цвет.

Подводя итог этому небольшому обсуждению, отмечу, что главное - оформить решение задачи так, чтобы оно было понятно. Понятно и Вам, и экзаменатору, который будет проверять работу.

## Литература

1. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа 10-11 класс. Учебник и задачник, 2-е изд. - М.: Мнемозина, 2001.
2. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Уравнения и неравенства – М.: Экзамен, 1998.
3. Метод интервалов //Квант, № 12, 1985 г.