**Затруднения при решении задач математической грамотности на уроках алгебры в условиях реализации ФГОС нового поколения**

При решении задач по математической грамотности на уроках алгебры были рассмотрены затруднения при решении задач с незнакомым контекстом и предложена методика работы с задачей, представленной в контексте, приближенном к реальной жизненной ситуации.

В основу требований к заданиям легли требования, представленные ФГБНУ «Институт стратегии развития образования Российской академии образования». Первостепенной задачей было разобраться, как конструировать задание, чтобы в нем контекст отражал реальный мир, и присутствовала проблема, требующая решения средствами школьного курса математики. А на следующем шаге работы предстояло понять, как учителю работать с этим конструктом.

Процесс конструирования заданий состоял из нескольких этапов: необходимо было придумать ситуацию, предложить модельное решение и систему оценивания задания. Каждую разработанную задачу решал учитель и сравнивал с предложенным решением, и не всегда решение учителя совпадало с модельным.

Пример.

|  |  |
| --- | --- |
|  | *В семье москвичей Ивановых случилось радостное событие – в гости на неделю к ним приехала мамина сестра Кристина. Кристина всем сообщила, что у нее целый план экскурсионных прогулок на эту неделю. И она уже простроила маршрут своего передвижения на каждый день: выйдя из дома, сначала она едет на метро до станции Охотничий ряд, а потом пересаживается на общественный транспорт и едет пару остановок до экскурсионного бюро. По окончании экскурсии она каждый день возвращается назад тем же маршрутом. Паша, племянник Кристины, предложил ей помочь сэкономить на проезде* |
| *показав какие тарифы на поездки, действуют по городу. Кристина задумалась, ее внимание привлек тариф «Кошелек», и она попросила племянника рассчитать сумму, которую ей надо закинуть на карту, чтобы хватило на неделю ее прогулок. Быстренько выполнив вычисления (35+19)\*14, Паша сказал, что 756 рублей будет достаточно. Каково же было удивление Кристины, когда в последний день своего отдыха она не смогла по карте пройти через турникет в метрополитене из-за нехватки средств на карте. Как такое могло получиться?* | |

При выполнении данного задания могут получаться ответы, например: «турникет сломался», «время между пересадками было больше 90 минут» и др. Проблема скрывается в тонкостях тарифного плана «Кошелек»: он активируется, когда совершается поездка на метро. Когда Кристина возвращается с экскурсии, то она сначала едет на наземном транспорте и не активируется, а значит, она оплачивает полную стоимость проезда. Решение, предложенное в тексте задачи, не соответствует ситуации. Таким образом, стало очевидно, что особого внимания требует анализ текста задания, представление ситуации, как она происходит в реальном мире (помещая себя на место героини), моделирование ситуации. Все эти умения практически не тренируются при решении математических задач, так как их контексты отвлечены от реальности, и даже если сюжет задачи напоминает реальную ситуацию, то в вопросе необходимо найти величину, которая в реальности уже заведомо известна, например: *«Абонентская плата за услуги городской телефонной сети включает оплату домашнего телефона, исходящих звонков по мобильной связи и интернета. Анализируя счёт, выставленный городской телефонной сетью за услуги, абонент обратил внимание на то, что абонентская плата за телефон в 4 раза меньше, чем за интернет, и на 216 р. меньше, чем за исходящие звонки по мобильной связи. Чему равна стоимость интернета, если в счёте была выставлена сумма 1080 р.?»* Если представить, что Вы анализируете счет, то решать задачу не надо, стоимость оплаты за интернет там указана в явном виде.

Когда встал вопрос о том, что же взять за основу для успешного решения задач, представленных в разнообразных жизненных контекстах, то оттолкнулись от работ Льва Моисеевича Фридмана. Он предлагал 8 этапов работы над задачей. Подробно остановимся на каждом из них:

*Этап 1 – это этап анализа текста*. Один из самых важных этапов работы с задачей, где выделяется информация, значимая для решения задачи: числовые данные (числовые характеристики, которые есть в условии задачи), величины и объекты, с которыми что-то происходит. Учащийся выделяет непонятные слова и разбирается с тем, что же они означают.

Ключевое: этап анализа закончен, когда учащийся понимает все характеристики, что происходит в задаче, что ему дано и что нужно найти. Если всё это установлено, то данный этап закончен.

*Этап 2 – интерпретация условия задачи.* Здесь учащийся погружает себя в условие задачи, представляя его так, как будто всё описанное происходит реально в жизни. На этом этапе он рассматривает все те величины, которые выделил на предыдущем этапе. Он смотрит, как они связаны между собой? Для решаемой задачи составляется краткая запись на основании выявленных взаимосвязей. От того насколько качественно составлена краткая запись напрямую может зависеть способ решения задачи. Краткая запись к задаче может быть представлена в виде схемы, рисунка, таблицы и т.п. Нет никаких ограничений для формы её представления. Заметим, что краткая запись считается качественной, если по ней можно восстановить условие задачи со всеми взаимосвязями. На данном этапе также выявляется противоречивая или лишняя информация, выясняется, есть ли недостающая информация. Если задача содержит лишнюю информацию, то условие задачи должно быть переформулировано без лишней информации. Следующий шаг – формулирование задачи на языке математики.

Как только этот этап закончен, начинается следующий.

*Этап 3 – поиск способа решения задачи.*

Опираясь на краткую запись, учащийся с помощью различных вопросов: «Могу ли я сразу ответить на вопрос задачи? Что нужно знать, чтобы ответить на вопрос данной задачи? и т.д.», выходит на поиск способа её решения. Организуя поиск решения задачи вместе с детьми, учитель должен продумать систему специально подобранных вопросов, при помощи которых организуется выбор решения задачи. Эти вопросы не должны быть наводящими, они должны вести к самостоятельному выбору решения.

*Этап 4 – составление плана решения задачи***.** Если на этапе поиска была составлена цепочка рассуждений, которая как бы по спирали раскручивает задачу, то составление плана не представляет сложности. Фактически, это обратная последовательность шагов. Необходимо обязательно зафиксировать план решения задачи, так как, если задача содержит более одного шага в своём решении, приходится «в голове» удерживать большую последовательность шагов, причем каждый шаг может включать в себя несколько действий. Особенно важно это при решении геометрических задач.

*Этап 5 – запись решения задачи.* Это – реализация плана, составленного на предыдущем этапе.

*Этап 6 – формулирование ответа на языке контекста задачи.* Получив ответ, учащийся должен вернуться к той задаче, которую он решает и выяснить, действительно ли ответ на её вопрос получен? Полученный ответ необходимо представить именно в контексте той ситуации, с которой работали первоначально.

*Этап 7 – проверка правильности решения.* Не секрет, что существуют 4 наиболее распространенных способа проверки правильности решения: спроси у учителя, сравни результат с соседом, загляни в ответы, сравни решение с образцом или эталоном. Когда ребенок оказывается на контрольной или диагностической работе, на экзамене, он оказывается наедине с собой и эти способы проверки не работают. В качестве альтернативных способов проверки мы рассматриваем следующие способы:

- прикидка результата (самый распространенный в реальной жизни)

- установление границ результата

- решение задачи другим способом

- установление соответствия результата решения условию задачи.

*Этап 8 – работа с задачей после её решения.* Это тот самый этап, когда в сюжете всё уже известно, задача решена, но её, тем не менее, можно развивать дальше. Можно поменять вопрос задачи и решить эту «новую» задачу. Конструирование новых вопросов к задаче позволяют развивать её сюжет. Можно каким-то образом изменять условие задачи. Как вариант, можно решить обратную задачу, но следует учитывать, что не всякая обратная задача может иметь решение.

Рассмотрим эти этапы работы с текстовой задачей в применении к задаче из открытого банка математической грамотности «Доставка обеда». Почему именно эта задача? У многих учителей есть опыт работы с этой задачей. Но когда учителя получают задание расписать каждый этап работы с данной задачей по методике Льва Моисеевича Фридмана. Получаем реплики: мы не знаем, что писать на этапах со 2 по 4, то есть между 1 и 5, между этапами анализа текста и непосредственно решением задачи. Получается, что данные этапы вызвали затруднение. У нас замечательные учителя, они умеют решать задачи, но не умеют рефлексировать те рассуждения, которые проводят внутри себя, когда начинают реализовывать решение. Говорят: это очевидно, это понятно, но не могут объяснить способ, не умеют передавать его учащимся. Им не понятно, как работать с детьми над решением таких задач.

Пример. Доставка обеда

В ресторане японской кухни действуют следующие условия доставки:

* стоимость доставки заказов до 990 рублей – 149 рублей;
* от 990 рублей – доставка бесплатно.

Иван хочет заказать себе обед, состоящий из горячего блюда, салата и десерта. Цены представлены в таблице.



*Какую наименьшую сумму денег Иван заплатит за заказ из трёх блюд с учётом доставки?*

**1 этап**, где мы выделяем информацию, значимую для решения задачи.



Если мы хорошо отработали анализ текста, то понимаем, что есть определенные условия на доставку, есть 3 столбика, где для трёх видов блюд есть численные значения, есть вопрос, который говорит, какую наименьшую сумму денег заплатит Иван за заказ из трёх блюд с учетом доставки. Мы понимаем, что нам нужно найти наименьшую сумму денег за заказ из трёх блюд с учетом доставки, при этом обед состоит из трёх блюд по одному из каждого столбика. Это все данные, которые мы должны учесть.

На **2 этапе** мы должны понять, какие математические объекты соответствуют объектам из реального мира, представленным в условии задачи. Необходимо обязательно обосновывать, почему объекту реального мира сопоставляется именно такой объект реального мира. Например, если в какой-то задаче есть колесо, то нужно точно понимать какой математический объект ему будет соответствовать: окружность, круг, тор и т.п. В данной задаче мы рассматриваем следующие объекты реального мира и математические объекты, который сопоставляем им:

|  |  |
| --- | --- |
| **Объект реального мира** | **Математический объект** |
| «Горячие блюда» характеризуются названием блюд, каждое блюдо имеет цену. | Множество А, состоит из 4 чисел: 340, 360, 325, 390. |
| «Салат» характеризуется названием  блюд, каждое блюдо имеет цену. | Множество В, состоит из 4 чисел: 325, 250, 350, 295. |
| «Десерт» характеризуется названием блюд, каждое блюдо имеет цену. | Множество С, состоит из 4 чисел: 290, 320, 265, 310. |
| Заказ – набор из трех блюд по 1 из каждой категории. | Набор из трех чисел по одному из каждого множества. |
| Стоимость заказа – сумма цен входящих блюд. | Сумма трех чисел, взятых по одному из каждого множества. |
| Доставка, характеризуется условием:  149, если стоимость заказа до 990 рублей;  бесплатно, если стоимость заказа от 990 рублей. | Число  d = |
| Наименьшая оплата заказа и доставки. | Наименьшее значение суммы трех чисел, взятых по одному из каждого множества и числа d. |

На этом этапе мы точно видим ту область математики, в которой необходимо решить эту задачу. Область, в которую мы попадаем – это теория множеств.

Если мы переформулируем задачу на язык математики, то получим:

«Даны три множества чисел:

множество А = {340, 360, 325, 390},

множество В = {325, 250, 350, 295},

множество С = {290, 320, 265, 310}.

а – элемент множества А,

b – элемент множества В,

c – элемент множества С.

Число d =

Чему равна наименьшая сумма a + b + c + d?»

Переходим к **3-му этапу**. Последовательно задавая вопросы и отвечая на них, мы «раскручиваем» задачу:

Могу ли я сразу ответить на вопрос задачи? *«Нет».*

Что нужно знать, чтобы ответить на вопрос данной задачи? *«Итоговую сумму и чему равно число d».*

Что я не знаю? *«Итоговую сумму».*

Я могу её найти? *«Да».*

Что для этого нужно сделать? *«Выбрать наименьшие элементы из множеств и найти их сумму».*

Теперь я смогу ответить на вопрос задачи? *«Нет. Необходимо ещё учесть условие для d».*

Что для этого нужно сделать? *«Сравнить полученную сумму с числом 990».*

**Этап 4** – составление плана решения задачи.

План решения задачи:

1. Выбрать наименьшие элементы из множеств

2. Найти сумму выбранных элементов

3. Сравнить полученную сумму с числом 990

4. Найти итоговую сумму с учетом результата сравнения, т.е. условия для d

5. Записать ответ

**Этап 5** – решения задачи – осуществление плана:

1. 325 < 340 < 360 < 390

2. 250 < 295 < 325 < 350

3. 265 < 290 < 310 < 320

4. 325 + 250 + 265 = 840

5. 840 < 990

6. 840 + 149 = 989

Нужно обратить внимание на то, что 6 действий на данном этапе соответствуют 4 шагам плана.

Давая ответ в контексте задачи (**этап 6**), можно сказать, что Иван заплатит 989 рублей и это будет самый дешевый вариант.

На **этапе 7** округляем и прикидываем, правильно ли посчитано:

330 + 250 + 260 = 840

840+150=990

Нет смысла рассматривать другие стратегии решения, т.к. с учётом доставки – это наименьшее значение; без учёта доставки сумма будет больше 990.

На **этапе 8** нужно иметь в виду, что если сумма объектов в данной задаче будет меньше 990, то нужно добавить доставку. В реальной жизни может возникнуть ситуация, что если взять не самые дешевые блюда, то этот вариант может оказаться дешевле. В данном случае мы имеем дело с задачей низкого уровня сложности, и заявленная нами стратегия решения (план решения задачи) срабатывает, но если мы хотим развивать задачу, то можно подобрать такие числа, чтобы цены на блюда были не самыми дешевыми, но их сумма была, например, 991, а стоимость самых дешевых из-за стоимости доставки превышала эту величину, как вариант. Можно варьировать и поиграть с числами. В данной же задаче вопрос набора чисел выше 990 не стоит.

Нужно обратить внимание на то, что, как правило, эту задачу решают, не видя в ней математики, а на наш взгляд – это в корне неверно. Если мы следуем всем этапам методики решения текстовых задач, то мы не только «видим» математику, но и работаем в «чисто математическом поле». Переформулирование задачи на язык математики позволяет нам это сделать.

Это наглядный пример того, как можно работать с задачей, следуя этапам методики решения задачи. Представленный алгоритм можно предложить, как универсальный, который необходимо освоить учащимся для решения любой задачи, контекстной или стандартной текстовой. Когда учащийся работает с задачей по данному алгоритму, не пропуская ни одного этапа, то, рассматривая задачу с разных сторон, он учится видеть в ней математику, применять имеющиеся знания и интерпретировать результат в контексте представленной жизненной ситуации, что, несомненно, помогает ему быть более успешным при решении жизненных задач языком математики.