МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА №18»

Обыкновенные дроби в задачах

(занятие внеурочной деятельности для 5 класса)

Автор: Дайбова Ю.В.
учитель математики
высшей категории
МБОУ «СОШ №18»

Миасский городской округ
2023

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В развитии интереса к математике большую роль играют занимательные задания. Систематическая работа на уроках: решение задач повышенной сложности, решение логических задач; участие в различных математических олимпиадах, конкурсах приносит обучающимся огромное удовлетворение. Выбирая тему для занятия, остановилась на задачах с обыкновенными дробями, так как очень часто различные задания с обыкновенными дробями предлагаются и в конкурсе «Кенгуру», и на олимпиадах. Изучение правильных и неправильных дробей нашло применение в задачах, которые мы рассматривали на занятиях внеурочной деятельности. Подбор конкретных практических задач помог нам исследовать свойство взаимно обратных дробей и познакомиться с историей возникновения обыкновенных дробей.

Цель: изучение расположения взаимно обратных дробей на координатной прямой относительно 1.

Задачи:

- Обобщить исторический материал о дробях
- Разобрать частные случаи
- Доказать или опровергнуть гипотезы
- Рассмотреть примеры задач по установленному свойству взаимно обратных дробей

Объект исследования:

- обыкновенные дроби

Гипотеза:

- Правильная дробь ближе к 1, чем обратная к ней

Методы и приёмы:

- Анализ научной и методической литературы
- Подбор задач с обыкновенными дробями
- Математические расчёты.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

История происхождения дробей

Необходимость в дробных числах возникла у человека на весьма ранней стадии развития. Уже дележ добычи, состоявший из нескольких убитых животных, между участниками охоты, когда число животных оказывалось не кратным числу охотников, могло привести первобытного человека к понятию о дробном числе.

Наряду с необходимостью считать предметы у людей с древних времён появилась потребность измерять длину, площадь, объём, время и другие величины. Результат измерений не всегда удаётся выразить натуральным числом, приходится учитывать и части употребляемой меры. Исторически дроби возникли в процессе измерения.

Потребность в более точных измерениях привела к тому, что начальные единицы меры начали дробить на 2, 3 и более частей. Более мелкой единице меры, которую получали как следствие раздробления, давали индивидуальное название, и величины измеряли уже этой более мелкой единицей.

- **Дроби в Древнем Риме**

У римлян основной единицей измерения массы, а также и денежной единицей служил «асс». Асс делился на 12 равных частей - унций. Из них складывали все дроби со знаменателем 12, то есть $^1/_{12}$, $^2/_{12}$, $^3/_{12}$… Со временем унции стали применяться для измерения любых величин.

Так возникли римские *двенадцатеричные дроби*, то есть дроби, у которых знаменателем всегда было число ***12***. Вместо $^1/_{12}$ римляне говорили «одна унция», $^5/_{12}$ – «пять унций» и т.д. Три унции назывались четвертью, четыре унции – третью, шесть унций – половиной.

- **Дроби в Древнем Египте**

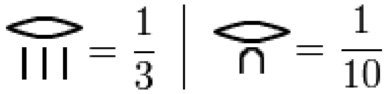
На протяжении многих веков египтяне именовали дроби “ломаным числом”, а первая дробь с которой они познакомились была 1/2. За ней последовали 1/4, 1/8, 1/16, …, затем 1/3, 1/6, …, т.е. самые простые дроби называемые единичными или *основными дробями*. У них числитель всегда единица. Лишь значительно позже у греков, затем у индийцев и других народов стали входить в употребление и дроби общего вида, называемые обыкновенными, у которых числитель и знаменатель могут быть любыми натуральными числами.

В Древнем Египте архитектура достигла высокого развития. Для того, чтобы строить грандиозные пирамиды и храмы, чтобы вычислять длины, площади и объемы фигур, необходимо было знать арифметику.

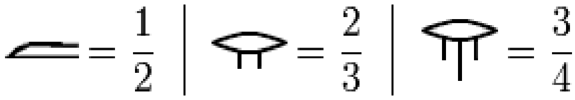
Из расшифрованных сведений на папирусах ученые узнали, что египтяне 4 000 лет назад имели десятичную (но не позиционную) систему счисления, умели решать многие задачи, связанные с потребностями строительства, торговли и военного дела.

Одним из первых известных упоминаний о египетских дробях является математический папирус Ринда. Три более древних текста, в которых упоминаются египетские дроби — это Египетский математический кожаный свиток, Московский математический папирус и Деревянная табличка Ахмима. Папирус Ринда включает таблицу египетских дробей для рациональных чисел вида 2/*n*, а также 84 математических задачи, их решения и ответы, записанные в виде египетских дробей.

Египтяне ставили иероглиф  (*ер*, «[один] из» или *ре*, рот) над числом для обозначения единичной дроби в обычной записи, а в священных текстах использовали линию. К примеру:



У них также были специальные символы для дробей 1/2, 2/3 и 3/4, которыми можно было записывать также другие дроби (большие чем 1/2).



Остальные дроби они записывали в виде суммы долей. Дробь $\frac{7}{8}$ они записывали в виде $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$,но знак «+» не указывали. А сумму $4+\frac{1}{3}$ записывали в виде $4\frac{1}{3}$. Следовательно, такая запись смешанных чисел (без знака «+») сохранилась с тех пор.

- **Нумерация и дроби в Древней Греции**

Поскольку греки работали с обыкновенными дробями лишь эпизодически, они использовали различные обозначения. Герон и Диофант, самые известные арифметики среди древнегреческих математиков, записывали дроби в алфавитной форме, причем числитель располагали под знаменателем. Но в принципе предпочтение отдавалось либо дробям с единичным числителем, либо шестидесятиричным дробям.

Недостатки греческих обозначений дробных чисел, включая использование шестидесятиричных дробей в десятичной системе счисления, объяснялись отнюдь не пороками основополагающих принципов. Недостатки греческой системы счисления можно отнести скорее за счет их упорного стремления к строгости, которое заметно увеличило трудности, связанные с анализом отношения несоизмеримых величин.

Слово «число» греки понимали как набор единиц, поэтому то, что мы теперь рассматриваем как единое рациональное число – дробь, – греки понимали как отношение двух целых чисел.

Именно этим объясняется, почему обыкновенные дроби редко встречались в греческой арифметике.

- **Дроби на Руси**

В русских рукописных арифметиках XVII века дроби называли долями, позднее «ломаными числами». В старых руководствах находим следующие названия дробей на Руси:

$^1/_2$ - половина, полтина	**$^1/_3$ – треть**
$^1/_4$ – четь	**$^1/_6$ – полтреть**
$^1/_8$ - полчеть	**$^1/_{12}$ –полполтреть**
$^1/_{16}$ - полполчеть	**$^1/_{24}$ – полполполтреть (малая треть)**
$^1/_{32}$ – полполполчеть (малая четь)	**$^1/_5$ – пятина**
$^1/_7$ - седьмина	**$^1/_{10}$ - десятина**

Славянская нумерация употреблялась в России до XVI века, затем в страну начала постепенно проникать десятичная позиционная система счисления. Она окончательно вытеснила славянскую нумерацию при Петре I.

- **Дроби в других государствах древности**

В китайской «Математике в девяти разделах» уже имеют место сокращения дробей и все действия с дробями.

У индийского математика Брахмагупты мы находим достаточно развитую систему дробей. У него встречаются разные дроби: и основные, и производные с любым числителем. Числитель и знаменатель записываются так же, как и у нас сейчас, но без горизонтальной черты, а просто размещаются один над другим.

Арабы первыми начали отделять чертой числитель от знаменателя.

- **Исследования при решении задач**

Если числитель дроби меньше знаменателя, то дробь называется *правильной* (например, 5/7), если больше или равен, — *неправильной* (например, 7/5).

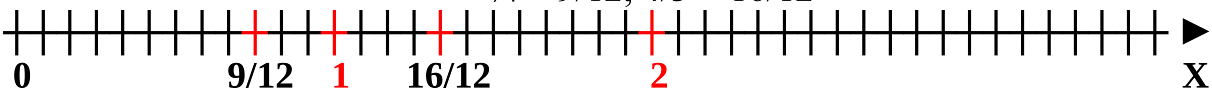
Два числа, произведение которых равно 1, называют взаимно обратными.

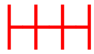
Чтобы ответить на вопросы рассмотренных задач (Приложение 1), надо отметить дроби ***a/b*** *(a, b – натуральные числа, a<b)* и ***b/a*** на координатной прямой и сравнить расстояния от точек с координатами ***a/b*** и ***b/a*** до 1.

Исследование началось с разбора нескольких задач.

1 случай. Рассмотрим дроби ¾ и 4/3.

¾ = 9/12, 4/3 = 16/12



 расстояние от точки с координатой 9/12 (или ¾) до 1,

 расстояние от точки с координатой 16/12 (или 4/3) до 1.

Вывод:

Точка с координатой ¾ ближе к 1, чем точка с координатой 4/3, т.е. **правильная дробь ¾ ближе к 1, чем обратная дробь 4/3**.

Аналогично рассматриваются ещё три пары дробей. Результаты эксперимента представлены в таблице (<u>Приложение 2).</u>

На основе полученных результатов выдвинули две гипотезы.

Гипотеза 1.

Правильная дробь *a/b* ближе к 1,чем обратная дробь *b/a.*

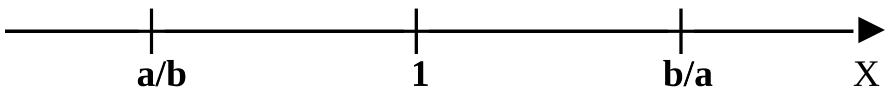
Гипотеза 2.

Не существует такой правильной дроби *a/b* и обратной ей дроби *b/a,* которые находятся на одном и том же расстоянии от 1.

Затем каждую гипотезу надо было проверить: доказать или опровергнуть.

Проверка гипотезы 1.

Пусть задана правильная дробь **a/b** (*a, b – натуральные числа, a<b).* Запишем дробь, обратную данной дроби: **b/a**. Отметим обе дроби на координатной прямой.



Найдем два расстояния: от точки с координатой **a/b** до **1** и от точки с координатой **b/a** до **1**.

$1- a/b = b/b - a/b = (b – a)/b$, $\quad$ $b/a - 1 = b/a - a/a = (b – a)/a$.

Так как *a<b,* то из двух дробей с одинаковыми числителями больше та дробь, у которой знаменатель меньше, т.е. $(b-a)/b < (b-a)/a$. Иначе говоря, расстояние от правильной дроби a/b до 1 меньше расстояния от обратной дроби b/a до 1.

***Вывод*:**
правильная дробь a/b ближе к 1, чем обратная дробь b/a. Так как a и b – произвольные натуральные числа, это свойство выполняется для всех правильных дробей.

Проверка гипотезы 2.

Предположим, что существуют дроби **a/b** и **b/a** *(a, b- натуральные, a<b),* которые удалены от **1** на одно и то же расстояние.

Найдём соответствующие расстояния:

$$1 - a/b = b/b - a/b = (b-a)/b,$$

$$b/a – 1 = b/a - a/a = (b-a)/a.$$

Рассмотрим равенство *(b-a)/b=(b-a)/b.* Так как числители дробей равны, то должны быть равны и их знаменатели, т.е. a=b, а это противоречит определению правильной дроби (по условию *a<b*). Значит, наше предположение неверно. Гипотеза неверна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Две стихии господствуют в математике – числа и фигуры с их многообразием свойств и взаимосвязей. Решение задачи – это всегда поиск, приводящий к выявлению каких-то зависимостей и отношений, и в этом процессе помогают не только различные приёмы и методы, но и интуиция, и догадка. Как заметил Д. Пойа, **«Крупное научное открытие даёт решение крупной проблемы, но и в решение любой задачи присутствует крупица открытия».**

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г. И. Глейзер “История математики в школе”: М. Просвещение,1964 г
2. И. Я. Депман “История арифметики”: М. Просвещение, 1965 г
3. Научно – теоретический и методический журнал «Математика в школе», №10, 2007
4. Все задачи «Кенгуру»: Санкт-Петербург, 2005 г
5. Предметные недели в школе. Математика: Волгоград, 2002 г
6. Интернет ресурсы

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1.

1) 

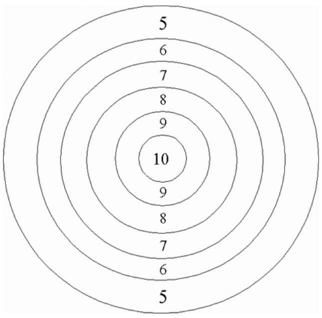
Две подводные лодки идут на встречу друг другу. Первой подводной лодке осталось пройти 3/4 мили, а второй – 4/3 мили. Какая подводная лодка прибудет к месту встречи первой, если и их скорости одинаковы?

Ответ: **Первая лодка.**

2) 

Винтик и Шпунтик получили задание на конкурсе: набрать из одного ящика по 1 кг гвоздей без взвешивания. В результате Винтик собрал 4/5 кг гвоздей, а Шпунтик – 5/4 кг. Кто из них оказался точнее и выиграл конкурс?

Ответ: **Винтик.**



3)

При проведении артиллерийских стрельб центр мишени находился на высоте 1 м от края оврага. После двух выстрелов выяснилось, что первый снаряд попал выше центра мишени – в точку, находящуюся на высоте 3/2 м от края оврага, а второй снаряд попал ниже – в точку, находящуюся на высоте 2/3 м от края оврага. Какой выстрел был более точным?

Ответ: **Второй выстрел.**

4)  Для изготовления первого торта повар использовал 7/8 кг муки, а для изготовления второго торта – 8/7 кг муки. Масса какого торта будет ближе к 1кг, если все остальные компоненты, входящие в из состав, взяты в одинаковом количестве для обоих тортов?

Ответ: **Первого торта.**

Приложение 2.

Случай	1	2	3	4	
Правильная дробь a/b	3/4	4/5	2/3	7/8	
Обратная дробь b/a	4/3	5/4	3/2	8/7	
a/b ближе к 1, чем b/a	+	+	+	+	
a/b дальше от 1, чем b/a	-	-	-	-	