**Определенный интеграл. Как вычислить площадь фигуры**

Переходим к рассмотрению приложений интегрального исчисления. На этом уроке мы разберем типовую и наиболее распространенную задачу **– как с помощью определенного интеграла вычислить площадь плоской фигуры**. Наконец-то ищущие смысл в высшей математике – да найдут его. Мало ли. Придется вот в жизни приближать дачный участок элементарными функциями и находить его площадь с помощью определенного интеграла.

Для успешного освоения материала, необходимо:

1) Разбираться в неопределенном интеграле хотя бы на среднем уровне. Таким образом, чайникам для начала следует ознакомиться с уроком [**Неопределенный интеграл. Примеры решений**](http://mathprofi.ru/integraly_primery_reshenij.html).

2) Уметь применять формулу Ньютона-Лейбница и вычислять определенный интеграл. Наладить теплые дружеские отношения с определенными интегралами можно на странице [**Определенный интеграл. Примеры решений**](http://mathprofi.ru/opredelennye_integraly_primery_reshenij.html).

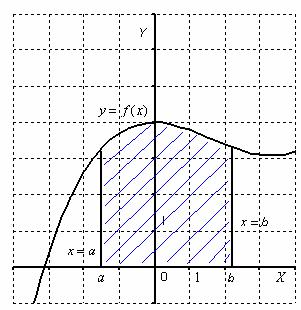
В действительности, для того чтобы находить площадь фигуры не надо так уж много знаний по неопределенному и определенному интегралу. **Задание «вычислить площадь с помощью определенного интеграла» всегда предполагает построение чертежа**, поэтому гораздо более актуальным вопросом будут ваши знания и навыки построения чертежей. В этой связи полезно освежить в памяти графики основных элементарных функций, а, как минимум, уметь строить прямую, параболу и гиперболу. Сделать это можно (многим – нужно) с помощью методического материала [**Графики и свойства элементарных функций**](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) и статьи о[**геометрических преобразованиях графиков**](http://mathprofi.ru/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii.html).

Собственно, с задачей нахождения площади с помощью определенного интеграла все знакомы еще со школы, и мы мало уйдем вперед от школьной программы. Этой статьи вообще могло бы и не быть, но  дело в том, что задача встречается в 99 случаев из 100, когда студент ~~мучается от ненавистной вышки~~с увлечением осваивает курс высшей математики.

Материалы данного практикума изложены просто, подробно и с минимумом [**теории**](http://mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html).

Начнем с криволинейной трапеции.

**Криволинейной трапецией** называется плоская фигура, ограниченная осью http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image004.gif, [**прямыми**](http://mathprofi.ru/uravnenie_pryamoi_na_ploskosti.html) http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image006.gif, http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image008.gif и графиком [**непрерывной**](http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на отрезке http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image071.gif функции http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image002.gif, которая [**не меняет знак**](http://mathprofi.ru/nuli_funkcii_intervaly_znakopostoyanstva_metod_intervalov.html) на этом промежутке. Пусть данная фигура расположена *не ниже* оси абсцисс:



Тогда **площадь криволинейной трапеции численно равна определенному интегралу http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image012.gif**. У любого определенного интеграла (который существует) есть очень хороший геометрический смысл. На уроке [**Определенный интеграл. Примеры решений**](http://mathprofi.ru/opredelennye_integraly_primery_reshenij.html) я говорил, что определенный интеграл – это число. А сейчас пришла пора констатировать еще один полезный факт. **С точки зрения геометрии определенный интеграл – это ПЛОЩАДЬ**.  
  
То есть, **определенному интегралу (если он существует) геометрически соответствует площадь некоторой фигуры**. Например, рассмотрим определенный интеграл http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image014.gif. Подынтегральная функция http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image016.gif задает на плоскости кривую, располагающуюся выше оси http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image004_0000.gif (желающие могут выполнить чертёж), а сам определенный интеграл http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image014_0000.gif численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

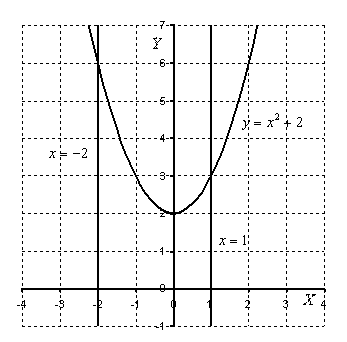
Пример 1

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image019.gif, http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image021.gif, http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image023.gif, http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image025.gif.

Это типовая формулировка задания. **Первый и важнейший момент решения – построение чертежа**. Причем, чертеж необходимо построить **ПРАВИЛЬНО**.

При построении чертежа я рекомендую следующий порядок: **сначала** лучше построить все прямые (если они есть) и только **потом** – параболы, гиперболы, графики других функций. Графики функций выгоднее строить **поточечно**, с техникой поточечного построения можно ознакомиться в справочном материале [**Графики и свойства элементарных функций**](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html). Там же можно найти очень полезный применительно к нашему уроку материал – как быстро построить параболу.

В данной задаче решение может выглядеть так.  
Выполним чертеж (обратите внимание, что уравнение http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image021_0000.gif задает ось http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image004_0000.gif):

  
Штриховать криволинейную трапецию я не буду, здесь очевидно, о какой площади идет речь. Решение продолжается так:

На отрезке http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image030.gif  график функции http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image019_0000.gif расположен **над осью http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image004_0001.gif**, поэтому:

http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image032.gif

Ответ:**http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image034.gif**

У кого возникли трудности с вычислением определенного интеграла и применением формулы Ньютона-Лейбница http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image036.gif, обратитесь к лекции [**Определенный интеграл. Примеры решений**](http://mathprofi.ru/opredelennye_integraly_primery_reshenij.html).

После того, как задание выполнено, всегда полезно взглянуть на чертеж и прикинуть, реальный ли получился ответ. В данном случае «на глазок» подсчитываем количество клеточек в чертеже – ну, примерно 9 наберётся, похоже на правду. Совершенно понятно, что если бы у нас получился, скажем, ответ: 20 квадратных единиц, то, очевидно, что где-то допущена ошибка – в рассматриваемую фигуру 20 клеточек явно не вмещается, от силы десяток. Если ответ получился отрицательным, то задание тоже решено некорректно.

Пример 2

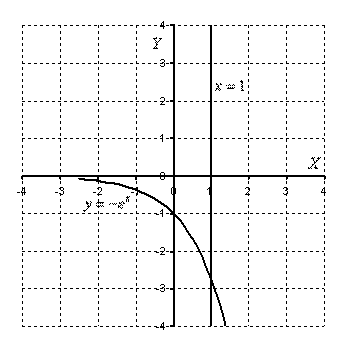
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image038.gif, http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image040.gif, http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image042.gif и осью http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image004_0002.gif

Это пример для самостоятельного решения. Полное решение и ответ в конце урока.

Что делать, если криволинейная трапеция расположена **под осью http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image004_0003.gif?**

Пример 3

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image045.gif, http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image025_0000.gif и координатными осями.

**Решение**: Выполним чертеж:  
  
Если криволинейная трапеция расположена**под осью http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image004_0004.gif** (или, по крайней мере, *не выше* данной оси), то её площадь можно найти по формуле: http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image050.gif  
В данном случае:  
http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image052.gif

Ответ: http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image054.gif

**Внимание! Не следует путать два типа задач**:

1) Если Вам предложено решить просто определенный интеграл без всякого геометрического смысла, то он может быть отрицательным.

2) Если Вам предложено найти площадь фигуры с помощью определенного интеграла, то площадь всегда положительна! Именно поэтому в только что рассмотренной формуле фигурирует минус.

На практике чаще всего фигура расположена и в верхней и в нижней полуплоскости, а поэтому, от простейших школьных задачек переходим к более содержательным примерам.

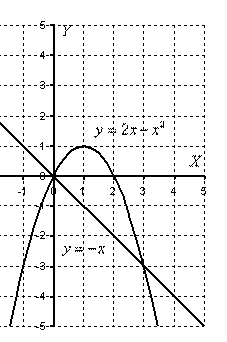
Пример 4

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image056.gif, http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image058.gif.

**Решение**: Сначала нужно выполнить чертеж. Вообще говоря, при построении чертежа в задачах на площадь нас больше всего интересуют точки пересечения линий. Найдем точки пересечения параболы http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image060.gif и прямой http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image058_0000.gif. Это можно сделать двумя способами. Первый способ – аналитический. Решаем уравнение:  


Значит, нижний предел интегрирования http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image065.gif, верхний предел интегрирования http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image067.gif.  
**Этим способом лучше, по возможности, не пользоваться**.

Гораздо выгоднее и быстрее построить линии поточечно, при этом пределы интегрирования выясняются как бы «сами собой». Техника поточечного построения для различных графиков подробно рассмотрена в справке[**Графики и свойства элементарных функций**](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html). Тем не менее, аналитический способ нахождения пределов все-таки приходится иногда применять, если, например, график достаточно большой, или поточенное построение не выявило пределов интегрирования (они могут быть дробными или иррациональными). И такой пример, мы тоже рассмотрим.

Возвращаемся к нашей задаче: рациональнее сначала построить прямую и только потом параболу. Выполним чертеж:  
  
Повторюсь, что при поточечном построении пределы интегрирования чаще всего выясняются «автоматом».

**А теперь рабочая формула**: Если на отрезке http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image071.gif некоторая непрерывная функция http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image073.gif**больше либо равна** некоторой непрерывной функции http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image075.gif, то площадь фигуры, ограниченной графиками данных функций и прямыми http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image006.gif, http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image008.gif, можно найти по формуле: http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image077.gif

Здесь уже не надо думать, где расположена фигура – над осью или под осью, и, грубо говоря, **важно, какой график ВЫШЕ**(относительно другого графика), **а какой – НИЖЕ**.

В рассматриваемом примере очевидно, что на отрезке http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image079.gif парабола располагается выше прямой, а поэтому из http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image081.gif необходимо вычесть http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image083.gif

Завершение решения может выглядеть так:

Искомая фигура ограничена параболой http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image060_0000.gif сверху и прямой http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image058_0001.gif снизу.  
На отрезке http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image086.gif http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image088.gif, по соответствующей формуле:  
http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image090.gif

Ответ:**http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image092.gif**

На самом деле школьная формула для площади криволинейной трапеции в нижней полуплоскости (см. простенький пример №3) – частный случай формулы http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image094.gif. Поскольку ось http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image004_0005.gif задается уравнением http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image021_0001.gif, а график функции http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image075_0000.gif расположен *не выше* оси http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image004_0006.gif, то http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image100.gif

А сейчас пара примеров для самостоятельного решения

Пример 5

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image102.gif, http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image104.gif.

Пример 6

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image106.gif, http://mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image108.gif.

В ходе решения задач на вычисление площади с помощью определенного интеграла иногда случается забавный казус. Чертеж выполнен правильно, расчеты – п