# Раздел 2. Дифференциальные уравнения

# Модуль 4. Линейные дифференциальные уравнения и системы.

**Лекция 4.2**

**Аннотация**

Однородные ЛДУ (ОЛДУ) с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение ОЛДУ. Построение общего решения по корням характеристического уравнения (вывод для $n$=2). Неоднородные линейные ДУ (НЛДУ) с постоянными коэффициентами, метод неопределенных коэффициентов. Метод Лагранжа вариации постоянных (вывод для $n$=2).

## § 1. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

### *1.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами*

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ)

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n \cdot y = 0, \qquad (3.1)$$

$a_1, \ldots, a_n$ – некоторые действительные числа.

По теореме о структуре общего решения ЛОДУ (см. п. 1.2.2) его общее решение задается формулой:

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n, \qquad (3.2)$$

где $y_1(x),\ y_2(x), \ldots,\ y_n(x)$ – фундаментальный набор решений уравнения (3.1) .

Будем искать решение уравнения (3.1) в виде $y = e^{kx}$, где $k = const$ (*метод Эйлера*). Тогда

$$y' = k \cdot e^{kx},\ y'' = k^2 \cdot e^{kx}, \ldots,\ y^{(n-1)} = k^{n-1} \cdot e^{kx},\ y^{(n)} = k^n \cdot e^{kx}. \qquad (3.3)$$

Подставим функции $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ в уравнение (3.1). Имеем

$$k^n \cdot e^{kx} + a_1 \cdot k^{n-1} \cdot e^{kx} + \ldots + a_n \cdot e^{kx} = 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0$, то получаем

$$\boxed{k^n + a_1 \cdot k^{n-1} + \ldots + a_n = 0}. \qquad (3.4)$$

Алгебраическое уравнение (3.4) относительно $k$ называется ***характеристическим уравнением ЛОДУ*** (3.1).

Рассмотрим ЛОДУ второго порядка:

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0, \tag{3.5}$$

где $a, b$ – некоторые постоянные. Его характеристическое уравнение

$$k^2 + a \cdot k + b = 0. \tag{3.6}$$

В зависимости от значения дискриминанта $D = a^2 - 4b$ уравнения (3.6) возможны следующие случаи:

*Случай 1.* $D > 0$; корни $k_1 \neq k_2$ – действительные различные. Соответствующие этим корням решения $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$ являются линейно независимыми и образуют фундаментальный набор решений.

Действительно, их определитель Вронского

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = k_2 e^{k_1 x} e^{k_2 x} - k_1 e^{k_1 x} e^{k_2 x} = e^{(k_1 + k_2)x} \cdot (k_2 - k_1) \neq 0$$

(при $k_1 \neq k_2$). Тогда *общее решение* уравнения (3.5) имеет вид:

$$\boxed{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}. \tag{3.7}$$

*Пример 1.* Найдем общее решение ЛОДУ $y'' + y' - 2y = 0$.

1. Составим характеристическое уравнение, заменив $y'' \to k^2$, $y' \to k$, $y \to 1$:
   $$k^2 + k - 2 = 0.$$
2. Найдем его корни: $D = 9 > 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = -2$.
3. Составим фундаментальную систему решений (ФСР): $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$.
4. Запишем общее решение уравнения в виде (3.7): $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

*Случай 2.* $D = 0$; корни $k_1 = k_2 = k$ – действительные равные (кратные). ФСР, соответствующие этим корням, образуют $y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = xe^{kx}$, т.к. их определитель Вронского

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & e^{kx}(1 + kx) \end{vmatrix} = e^{2kx}(1 + kx) - kxe^{2kx} = e^{2kx} \neq 0.$$

Тогда *общее решение* уравнения (3.5) имеет вид:

$$\boxed{y = C_1 e^{kx} + C_2 xe^{kx} = (C_1 + C_2 x)e^{kx}}. \tag{3.8}$$

*Пример 2.* Найдем общее решение ЛОДУ $y'' + 6y' + 9y = 0$.

1. Составим характеристическое уравнение, заменив $y'' \to k^2$, $y' \to k$, $y \to 1$:
$$k^2 + 6k + 9 = 0.$$
2. Найдем его корни: $D = 0$, $k_1 = k_2 = 3$.
3. Составим фундаментальную систему решений (ФСР): $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = xe^{3x}$.
4. Запишем общее решение уравнения в виде (3.8): $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$.

<u>*Случай 3.*</u> $D < 0$; корни $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – комплексно-сопряженные $(\beta \neq 0)$. Тогда ФСР есть $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}$ и $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$.

Воспользуемся формулой Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Отсюда $y_{1,2} = e^{\alpha x}(\cos\beta x \pm i\sin\beta x)$. Рассмотрим линейные комбинации $y_1^* = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, $y_2^* = \frac{y_1 - y_2}{2i}$. Тогда $y_1^* = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2^* = e^{\alpha x}\sin\beta x$ есть ФСР, т.к.

$$W[y_1^*, y_2^*] = \begin{vmatrix} y_1^* & y_2^* \\ y_1^{*\prime} & y_2^{*\prime} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\cos\beta x - \beta\sin\beta x) & e^{\alpha x}(\sin\beta x + \beta\cos\beta x) \end{vmatrix} =$$
$$= e^{2\alpha x}\cos\beta x(\sin\beta x + \beta\cos\beta x) - e^{2\alpha x}\sin\beta x(\cos\beta x - \beta\sin\beta x) = e^{2\alpha x}\beta \neq 0$$

(при $\beta \neq 0$). Тогда *общее решение* уравнения (3.5) имеет вид:

$$\boxed{y = C_1 y_1^* + C_2 y_2^* = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)}. \qquad (3.9)$$

*Пример 3.* Найдем общее решение ЛОДУ $y'' - 2y' + 2y = 0$.

1. Составим характеристическое уравнение, заменив $y'' \to k^2$, $y' \to k$, $y \to 1$:
$$k^2 - 2k + 2 = 0.$$
2. Найдем его корни: $D = -4$, $k_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$, $\alpha = 1, \beta = 1$.
3. Составим фундаментальную систему решений (ФСР): $y_1 = e^x\cos x$, $y_2 = e^x\sin x$.
4. Запишем общее решение уравнения в виде (3.9): $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$.

Для нахождения общего решения ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами можно воспользоваться таблицей 1.

*Таблица 1*

Решение ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами

| *Дифференциальное уравнение* | $y'' + ay' + by = 0$ | | |
|---|---|---|---|
| *Характеристическое уравнение* | $k^2 + ak + b = 0$ | | |
| *Дискриминант* | $D > 0$ | $D = 0$ | $D < 0$ |
| *Корни характеристического уравнения* | $k_1 \neq k_2 \in \mathbb{R}$ | $k_1 = k_2 = k \in \mathbb{R}$ | $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ |
| *Общее решение* | $C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ | $\left(C_1 + C_2 x\right) e^{kx}$ | $e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ |

Приведем ***алгоритм решения ЛОДУ n-го порядка*** (3.1):

***1.*** Составить характеристическое уравнение (3.4).

***2.*** Найти его корни.

***3.*** Построить ФСР, поставив в соответствие каждому действительному корню $k$ характеристического уравнения кратности $r$ ссовокупность из $r$ линейно независимых частных решений: $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}, \ldots,$ $y_r = x^{r-1}e^{kx}$ и любой паре комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ кратности $q$ совокупность из $2q$ линейно независимых решений: $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = xe^{\alpha x} \cos \beta x, \ldots,$ $y_q = x^{q-1}e^{\alpha x} \cos \beta x$; $y_{q+1} = e^{\alpha x} \sin \beta x, \ldots,$ $y_{2q} = x^{q-1}e^{\alpha x} \sin \beta x$ $(r + 2q = n)$.

***4.*** Записать ***общее решение ЛОДУ*** (3.1) в виде $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$.

Для записи общего решения ЛОДУ в зависимости от корней характеристического уравнения можно воспользоваться таблицей 2, где $C, C_1, \ldots, C_r, D_1, \ldots, D_r$ – некоторые постоянные.

*Таблица 2*

Вид общего решения ЛОДУ *n*-го порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от корней характеристического уравнения

| *Корень* | *Некратные (не повторяются)* | *Кратные (повторяются $r$ раз)* |
|---|---|---|
| Вещественный $k$ | $Ce^{kx}$ | $e^{kx}(C_1 + C_2 x + \ldots + C_r x^{r-1})$ |
| Комплексно-сопряженные корни ($k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$) | $e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ | $e^{\alpha x}(C_1 + C_2 x + \ldots + C_r x^{r-1}) \cos \beta x +$ $+ e^{\alpha x}(D_1 + D_2 x + \ldots + D_r x^{r-1}) \sin \beta x$ |

*Пример 4*. Найдем общее решение ЛОДУ $y^{IV}-2y'''+2y'-y=0$.

1. Составим характеристическое уравнение, заменив $y^{IV}\to k^4$, $y'''\to k^3$, $y'\to k$, $y\to 1$:
$$k^4-2k^3+2k-1=0.$$
2. Найдем его корни:
$$k^4-2k^3+2k-1=(k^4-1)-2(k^3-k)=(k^2-1)(k^2+1)-2k(k^2-1)=$$
$$=(k^2-1)(k^2-2k+1)=(k-1)^3(k+1).$$
Характеристическое уравнение имеет действительные корни $k_{1,2,3}=1$, $k_4=-1$
3. Составим фундаментальную систему решений (ФСР): $y_1=e^x$, $y_2=xe^x$, $y_3=x^2e^x$, $y_4=e^{-x}$.
4. Запишем общее решение уравнения: $y=\left(C_1+C_2x+C_3x^2\right)e^x+C_4e^{-x}$.

*Пример 5*. Найдем общее решение ЛОДУ $y'''-2y''+y'-2y=0$.

1. Составим характеристическое уравнение, заменив $y'''\to k^3$, $y''\to k^2$, $y'\to k$, $y\to 1$:
$$k^3-2k^2+k-2=0.$$
2. Найдем его корни:
$$k^3-2k^2+k-2=(k^3-2k^2)+(k-2)=k^2(k-2)+(k-2)=(k-2)(k^2+1).$$
Характеристическое уравнение имеет действительные корни $k_1=2$, $k_{2,3}=\pm i,\ \alpha=0$, $\beta=1$.
3. Составим фундаментальную систему решений (ФСР): $y_1=e^{2x}$, $y_2=\cos x$, $y_3=\sin x$.
4. Запишем общее решение уравнения: $y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$.

## *1.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов*

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) *n*-го порядка с постоянными коэффициентами $a_1,\ \ldots,\ a_n$:

$$y^{(n)}+a_1\cdot y^{(n-1)}+\ldots+a_n\cdot y=f(x). \qquad (4.1)$$

Согласно теореме 2 (о структуре общего решения ЛНДУ) (см. п. 1.1), решение уравнения (4.1) есть сумма какого-либо частного решения $y_{чн}(x)$ этого уравнения и общего решения $y_{oo}(x)$ соответствующего ему однородного уравнения (3.1), т.е. $\boxed{y=y_{oo}+y_{чн}}$. Как найти $y_{oo}(x)$, мы рассмотрели в п. 1.3.

Частное решение $y_{чн}(x)$ ЛНДУ (4.1) может быть найдено двумя способами:

1) методом неопределенных коэффициентов (методом подбора);
2) методом вариации произвольной постоянной.

***Метод неопределенных коэффициентов*** для ЛНДУ (4.1) применим только в случае *специального вида правой части* (функции $f(x)$). Таким специальным видом может быть

$$\boxed{f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos \beta x + Q_m(x) \cdot \cos \beta x)}, \tag{4.2}$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены от $x$ степени $n$ и $m$ соответственно; $\alpha$ и $\beta$ – постоянные.

Тогда частное решение $y_{чн}(x)$ уравнения (4.1) имеет вид

$$\boxed{y_{чн}(x) = x^r e^{\alpha x} \cdot (P_l^*(x) \cdot \cos \beta x + Q_l^*(x) \cdot \cos \beta x)}, \tag{4.3}$$

где $P_l^*(x)$ и $Q_l^*(x)$ – многочлены от $x$ степени $l = \max(n, m)$ общего вида с неопределенными коэффициентами; $r$ – кратность корня $\lambda = \alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения (если среди корней характеристического уравнения нет корня $\lambda = \alpha \pm i\beta$, то $r = 0$)

<u>*Суть метода:*</u> по виду (4.2) правой части $f(x)$ уравнения (4.1) записывают ожидаемую форму частного решения $y_{чн}(x)$ (4.3) с неопределенными коэффициентами, затем подставляют ее в уравнение (4.1) и из полученного тождества находят коэффициенты.

Простейшие виды правых частей $f(x)$ уравнения (4.1) (частные случаи выражения (4.2)) и соответствующие им частные решения $y_{чн}(x)$ (частные случаи формулы (4.3)) указаны в таблице 3. Многочлены $P_l^*(x)$ и $Q_l^*(x)$ с неопределенными коэффициентами при различных значениях степени $l$ записываются в виде:

при $l = 0 \to A$;

при $l = 1 \to Ax + B$;

при $l = 2 \to Ax^2 + Bx + C$;

при $l = 3 \to Ax^3 + Bx^2 + Cx + D; \ldots;$

при $l = k \to Ax^k + Bx^{k-1} + \ldots + Cx + D$,

где коэффициенты $A, B, C, D, \ldots$ подлежат определению.

*Таблица 3*

Вид частного решения ЛНДУ *n*-го порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от вида правой части $f(x)$

| № | *Правая часть* $f(x)$ *уравнения (4.1)* | *Вид частного решения* $y_{чн}(x)$ *уравнения (4.1)* | |
|---|---|---|---|
| | | $\lambda=\alpha\pm i\beta$ *не является корнем характеристического уравнения* | $\lambda=\alpha\pm i\beta$ *является корнем кратности* $r$ *характеристического уравнения* |
| 1 | $f(x)=P_n(x)$, тогда $\alpha=0$, $\beta=0$ и, следовательно, $\lambda=0$ | $y_{чн}(x)=P_n^*(x)$ | $y_{чн}(x)=x^r\cdot P_n^*(x)$ |
| 2 | $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, тогда $\alpha\neq 0$, $\beta=0$ и, следовательно, $\lambda=\alpha$ | $y_{чн}(x)=e^{\alpha x}\cdot P_n^*(x)$ | $y_{чн}(x)=x^r\cdot e^{\alpha x}\cdot P_n^*(x)$ |
| 3 | $f(x)=P_n(x)\cdot\cos\beta x+Q_m(x)\cdot\sin\beta x$, тогда $\alpha=0$, $\beta\neq 0$ и, следовательно, $\lambda=\pm i\beta$ | $y_{чн}(x)=P_l^*(x)\cdot\cos\beta x+$ $+Q_l^*(x)\cdot\sin\beta x$ | $y_{чн}(x)=x^r\cdot(P_l^*(x)\cdot\cos\beta x+$ $+Q_l^*(x)\cdot\sin\beta x)$ |
| 4 | $f(x)=e^{\alpha x}\cdot(P_n(x)\cdot\cos\beta x+$ $+Q_m(x)\cdot\sin\beta x)$, тогда $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$ и, следовательно, $\lambda=\alpha\pm i\beta$ | $y_{чн}(x)=e^{\alpha x}\cdot(P_l^*(x)\cdot\cos\beta x+$ $+Q_l^*(x)\cdot\sin\beta x)$ | $y_{чн}(x)=x^r\cdot e^{\alpha x}\cdot(P_l^*(x)\cdot\cos\beta x+$ $+Q_l^*(x)\cdot\sin\beta x)$ |

*Замечания:*

1. После подстановки функции (4.3) в уравнение (4.1) приравнивают многочлены, стоящие перед одноименными тригонометрическими функциями в левой и правой частях уравнения.
2. Форма (4.3) сохраняется и в случаях, когда $P_n(x)\equiv 0$ или $Q_m(x)\equiv 0$.
3. Если правая часть уравнения (4.1) есть сумма функций вида (4.2), то для нахождения $y_{чн}(x)$ следует использовать теорему о наложении решений (см. лекцию 4.1), разбивая сложные уравнения на несколько простых.

*Пример 6.* Для нахождения общего решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами

$$y''+2y'+5y=xe^x\cos 2x+x^2-x+2$$

1. находим общее решение ДУ $y''+2y'+5y=0$;
2. находим частное решение ДУ $y''+2y'+5y=xe^x\cos 2x$;
3. находим частное решение ДУ $y''+2y'+5y=x^2-x+2$;

4. складываем решения, полученные в пп. 1-3. Это и будет общее решение исходного уравнения.

### *1.5. Метод Лагранжа вариации постоянных*

Если известна фундаментальная система решений $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ однородного уравнения $L[y]=0$, то общее решение соответствующего неоднородного уравнения $L[y]=f(x)$ можно найти ***методом Лагранжа вариации произвольных постоянных***. Этот метод можно применять при решении ЛНДУ как с переменными коэффициентами, так и с постоянными. При этом, если правая часть ЛНДУ с постоянными коэффициентами (4.1) не является частным случаем формулы (4.2), то этот метод позволяет найти решение.

Рассмотрим метод Лагранжа на примере ЛНДУ второго порядка

$$y'' + a\cdot y' + b\cdot y = f(x)\,. \tag{5.1}$$

Соответствующее ему однородное уравнение -

$$y'' + a\cdot y' + b\cdot y = 0\,. \tag{5.2}$$

Пусть известно общее решение уравнения (5.2)

$$y_{00}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)\,, \tag{5.3}$$

выраженное через фундаментальную систему решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$, где $C_1, C_2$ – произвольные постоянные.

<u>*Идея метода*</u>: Предполагается, что частное решение $y_{чн}(x)$ ЛНДУ (5.1) имеет вид (5.3), где постоянные $C_1$ и $C_2$ рассматриваются некоторыми функциями $C_1(x)$, $C_2(x)$ и подбираются таким образом, чтобы решение

$$y_{чн}(x) = C_1(x)\cdot y_1(x) + C_2(x)\cdot y_2(x) \tag{5.4}$$

удовлетворяло уравнению (5.1).

Для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ подставим (5.4) в уравнение (5.1). Будем предполагать, что функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ таковы, что

$$C_1'(x)\cdot y_1(x) + C_2'(x)\cdot y_2(x) = 0\,. \tag{5.5}$$

Тогда

$$y' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2' = C_1 y_1' + C_2 y_2'\,, \tag{5.6}$$

$$y'' = \left(C_1 y_1' + C_2 y_2'\right)' = C_1{}' y_1' + C_1 y_1'' + C_2{}' y_2' + C_2 y_2''. \qquad (5.7)$$

Подставим (5.4), (5.6), (5.7) в уравнение (5.1):

$$C_1{}' y_1' + C_1 y_1'' + C_2{}' y_2' + C_2 y_2'' + a(C_1 y_1' + C_2 y_2') + b(C_1 y_1 + C_2 y_2) = f(x).$$

Перегруппируем слагаемые:

$$C_1\left(y_1'' + a y_1' + b y_1\right) + C_2\left(y_2'' + a y_2' + b y_2\right) + C_1{}' y_1' + C_2{}' y_2' = f(x). \qquad (5.8)$$

Так как $y_1$ и $y_2$ – частные решения уравнения (5.2), то выражения, стоящие в скобках равенства (5.8) тождественно равны нулю, а потому

$$C_1{}' y_1' + C_2{}' y_2' = f(x).$$

Таким образом, функция (5.4) будет частным решением уравнения (5.1), если функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\boxed{\begin{cases} C_1{}'(x) y_1(x) + C_2{}'(x) y_2(x) = 0, \\ C_1{}'(x) y_1'(x) + C_2{}'(x) y_2'(x) = f(x). \end{cases}} \qquad (5.9)$$

Определитель системы (5.9) есть

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

в силу линейной независимости функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Поэтому система (5.9) имеет единственное решение

$$C_1{}'(x) = -\frac{y_2(x) \cdot f(x)}{W[y_1, y_2]}, \quad C_2{}'(x) = \frac{y_1(x) \cdot f(x)}{W[y_1, y_2]}. \qquad (5.10)$$

Интегрируя функции (5.10), находим $C_1(x)$ и $C_2(x)$, а затем по формуле (5.4) составляем частное решение уравнения (5.1).

*Пример 6.* Найдем общее решение ЛНДУ 2-го порядка (при $x > 0$)

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 1.$$

1) Приведем уравнение к приведенному виду, разделив обе части на $x^2$:

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 1 + \frac{1}{x^2}. \qquad (*)$$

2) Заметим, что одним из решений соответствующего однородного уравнения

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0 \qquad (**)$$

является функция $y_1(x) = x$. Найдем второе независимое решение, используя формулу Остроградского-Лиувилля или следствие из нее (см. теорему 9 лекции 4.1). Воспользуемся следствием из этой формулы:

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)} dx = x \cdot \int \frac{e^{\int \frac{2}{x} dx}}{x^2} dx = x \cdot \int \frac{e^{2\ln(x)}}{x^2} dx = x \cdot \int \frac{x^2}{x^2} dx = x^2 .$$

Тогда общее решение ЛОДУ (**)

$$y_{00}(x) = C_1 x + C_2 x^2 .$$

Найдем $y_{чн}(x)$ уравнения (*). Пусть $y_{чн}(x) = C_1(x)x + C_2(x)x^2$. Составим систему (5.9):

$$\begin{cases} C_1'(x)x + C_2'(x)x^2 = 0, \\ C_1'(x) + C_2'(x)2x = 1 + \dfrac{1}{x^2}. \end{cases}$$

Определитель Вронского

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0.$$

По формулам (5.10) находим

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x) \cdot f(x)}{W[y_1, y_2]} = -\frac{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2} = -\left(1 + \frac{1}{x^2}\right),$$

$$C_2'(x) = \frac{y_1(x) \cdot f(x)}{W[y_1, y_2]} = \frac{x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2} = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} .$$

Тогда

$$C_1(x) = -\int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = -x + \frac{1}{x},$$

$$C_2(x) = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) dx = \ln(x) - \frac{1}{2x^2} .$$

$$y_{чн}(x) = \left(-x + \frac{1}{x}\right)x + \left(\ln(x) - \frac{1}{2x^2}\right)x^2 = x^2\left(\ln(x) - 1\right) + \frac{1}{2} .$$

3) Запишем общее решение: $y = y_{оо} + y_{чн} = C_1 x + C_2 x^2 + x^2\left(\ln(x) - 1\right) + \dfrac{1}{2}$.