РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Презентацию подготовила
учитель математики Федина Г.И.
19.07.2021г.
г. Пятигорск, Ставропольский край

Квалификационная категория:
высшая

Цель: рассмотреть методы решения показательных уравнений.

Задачи: научиться классифицировать показательные уравнения по методам их решения.

ЭТИ ЗНАНИЯ ПОМОГУТ ПРИ РЕШЕНИИ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Свойства степеней

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$1^a = 1$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Формула перехода

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Для отрицательного показателя степени

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Определение

Показательным уравнением называют

уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

где $a \neq 1$, $a > 0$, и уравнения, сводящиеся

к этому виду.

ТЕОРЕМА

Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$,
где ***a*>0** $и \ a \neq 1$ равносильно уравнению
f(x)=g(x).

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. МЕТОД УРАВНИВАНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ.

Решить уравнение. $$3^{x^2-4.5}\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{27}$$

Решение.

Так как $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}=3^{0,5}$ и $\frac{1}{27}=27^{-1}=\left(3^3\right)^{-1}=3^{-3}$, то

$$3^{x^2-4.5}\cdot 3^{0,5}=3^{-3},\quad 3^{x^2-4.5+0.5}=3^{-3}$$

$$x^2-4=-3$$

$$x^2-1=0$$

$$x_1=1$$

$$x_2=-1$$

ОТВЕТ: -1;1

2.Метод введения новой переменной

Решите уравнение. а) $2^{2x}-6\cdot 2^{x}+8=0$

Решение. Пусть $2^{x}=t, где$ $t>0$. Получим

$t^{2}-6\cdot t+8=0$, по формулам Виета имеем:

$$\begin{cases} t_1+t_2=6 \\ t_1\cdot t_2=8 \end{cases}$$,значит $t_1=4, t_2=2$

При t=4, получим $2^{x}=4, 2^{x}=2^{2}, x=2$

При t=2, получим $2^{x}=2, 2^{x}=2 \ , x=1$

ОТВЕТ: 1;2

$б)^{*}\quad 18^x - 8\cdot 6^x - 9\cdot 2^x = 0$

Решение. Преобразуем выражение к виду, используя свойства степени

$$\left(3^2\cdot 2\right)^x - 8\cdot\left(3\cdot 2\right)^x - 9\cdot 2^x = 0,$$

$$3^{2x}\cdot 2^x - 8\cdot 3^x\cdot 2^x - 9\cdot 2^x = 0$$

Вынесем общий множитель 2^x за скобки, получим

$$2^x\cdot\left(3^{2x} - 8\cdot 3^x - 9\right) = 0$$

Так как $2^x \neq 0$ ни при каких $x \in R$, то

$$3^{2x} - 8\cdot 3^x - 9 = 0$$

Пусть $3^x = t, t > 0$. Тогда получим уравнение

$t^2 - 8t - 9 = 0$. По формулам Виета, имеем:

$\begin{cases} t_1 + t_2 = 8, \\ t_1 \cdot t_2 = -9 \end{cases}$, отсюда $\left[\begin{array}{l} t_1 = 9, \\ t_2 = -1 \end{array}\right.$

$t_2 = -1$ -посторонний корень

При $t = 9,\ 3^x = 9,\ 3^x = 3^2,\ x = 2$

Ответ: 2

$$в)^{*}\ 5^{2x+1}-13\cdot 15^{x}+54\cdot 9^{x-1}=0$$

Решение. Воспользуемся тем, что

$$5^{2x+1}=5^{2x}\cdot 5, 15^{x}=(5\cdot 3)^{x}=5^{x}\cdot 3^{x},$$

$$9^{x-1}=\left(3^{2}\right)^{x-1}=3^{2x-2}=3^{2x}\cdot 3^{-2}=3^{2x}\cdot\frac{1}{3^{2}}=3^{2x}\cdot\frac{1}{9}$$

Перепишем уравнение иначе

$$5^{2x}\cdot 5-13\cdot 5^{x}\cdot 3^{x}+54\cdot\frac{1}{9}\cdot 3^{2x}=0$$

$$5\cdot 5^{2x}-13\cdot 5^{x}\cdot 3^{x}+6\cdot 3^{2x}=0$$

Разделим уравнение почленно на $3^{2x} \neq 0$ при всех $x \in R$

Знаая, что $\dfrac{5^{2x}}{3^{2x}} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{2x}, \dfrac{5^x \cdot 3^x}{3^{2x}} = \dfrac{5^x}{3^x} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^x,$

получим уравнение

$$5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x + 6 = 0$$

Введем новую переменную $\left(\dfrac{5}{3}\right)^x = t, t > 0$

Уравнение примет вид: $5t^2 - 13 \cdot t + 6 = 0$

Вычислим дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac, D = (-13)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 6 = 169 - 120 = 49$$

Найдем корни уравнения:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, t_1 = \frac{13+7}{2 \cdot 5} = \frac{20}{10} = 2, t_2 = \frac{13-7}{2 \cdot 5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Вернемся к исходной переменной.

При $t_1 = 2$ $\left(\frac{5}{3}\right)^x = 2,$

$$\log_{\frac{5}{3}} \left(\frac{5}{3}\right)^x = \log_{\frac{5}{3}} 2,$$

$$x = \log_{\frac{5}{3}} 2$$

При $t_2 = \frac{3}{5}$ $\left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right),$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^{-1}, x = -1$$

Ответ: -1; $\log_{\frac{5}{3}} 2$

3.МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ

Решить уравнение. $2\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{3X+7}-7\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{3X+8}=49$

Решение.

Вынесем общий множитель $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+7}$ за скобки, получим

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{3X+7}\left(2-7\cdot\left(\frac{1}{7}\right)\right)=49,$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{3X+7}=49$$

Зная, что $49 = 7^2 = \left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$

Уравнение примет вид $\left(\frac{1}{7}\right)^{3X+7} = \left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$

3x+7=-2,

3x=-2-7,

3x=-9,

<u>*x=-3*</u>

Ответ: -3

Решить уравнение. $$\frac{1}{3^{x}+2}=\frac{1}{3^{x+1}}$$

Решение.

Дроби равны тогда и только тогда когда равны числители и знаменатели, значит

$3^{x+1}=3^{x}+2$, $3^{x+1}-3^{x}=2$, $3^{x}\cdot 3-3^{x}=2$,

$$3^{x}\cdot(3-1)=2$$

$$3^{x}\cdot 2=2$$

$$3^{x}=1$$

$$3^{x}=3^{0}$$

<u>$x=0$</u>

ОТВЕТ: 0

Графический способ решения

Решите уравнение. $3^x = -x + 4$

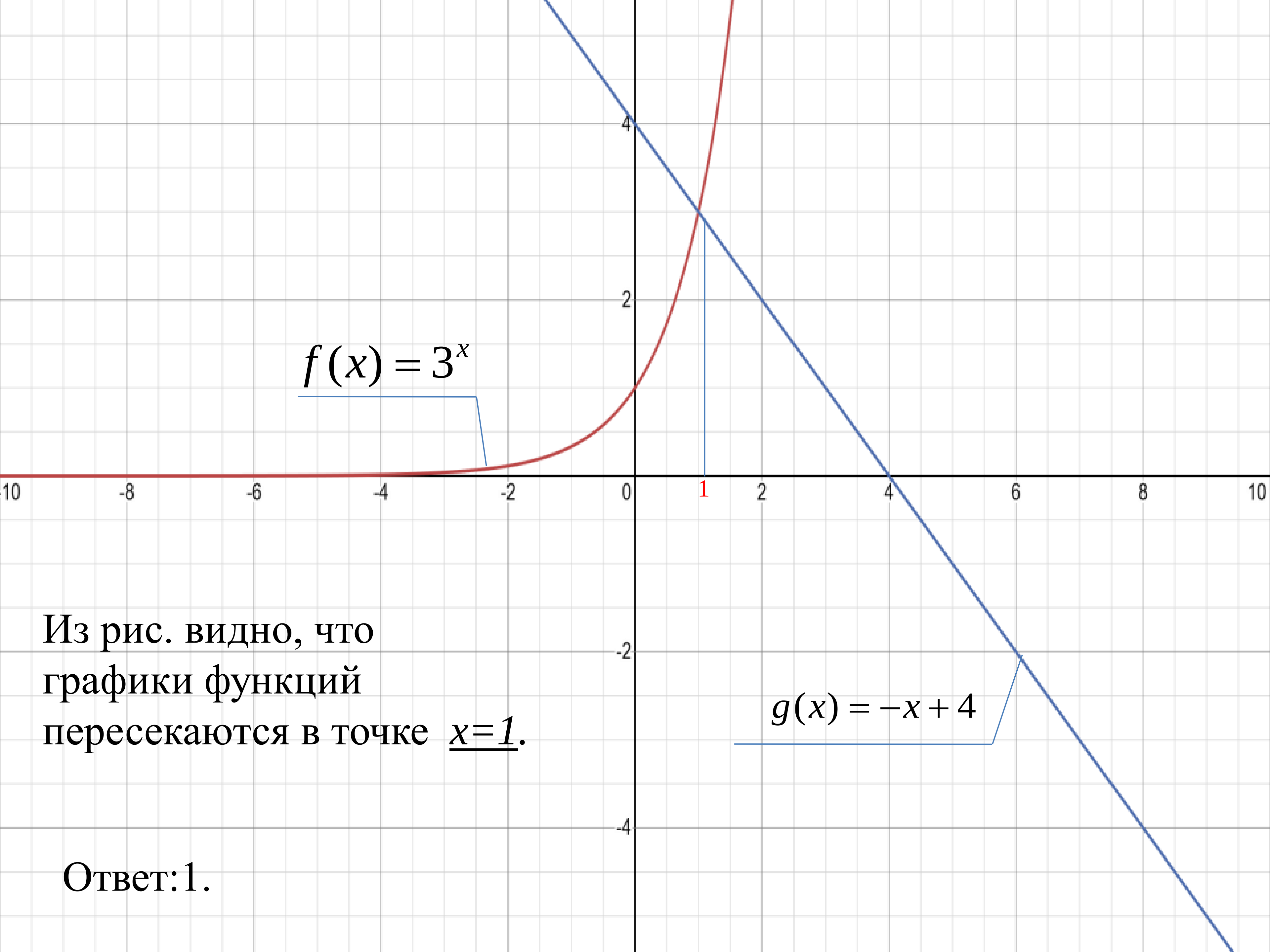
Решение.

Построим в одной системе координат графики функций

$f(x) = 3^x$ и $g(x) = -x + 4$

x	y
-1	1/3
-2	1/9
0	1
1	3
2	9

x	y
4	0
0	4



Из рис. видно, что графики функций пересекаются в точке <u>$x=1$</u>.

Ответ:1.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

ОПРЕДЕЛИТЬ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ			
УРАВНИВАНИЯ	РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ	ВВЕДЕНИЕ НОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	ГРАФИЧЕСКИЙ

1	$7^{x+2} - 14 \cdot 7^{x} = 5$	5	$3^{x} - \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} = 8$	9	$3^{x+2} - 5 \cdot 3^{x} = 36$
2	$2x + 1.8 = -5^{x}$	6	$5^{x+1} + 5^{x} + 5^{x-1} = 31$	10	$49^{x+1} = \left(\frac{1}{7}\right)^{x}$
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 4x + 6$	7	$27^{1-x} = \frac{1}{81}$	11	$4^{x} - 3 \cdot 2^{x} - 4 = 0$
4	$36 \cdot 216^{3x+1} = 1$	8	$9^{x} - 3^{x+1} = 54$	12	$3^{x} = -x - \frac{2}{3}$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

№ п/п	ВАРИАНТ -1	ВАРИАНТ-2
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4x + 6$	$3^x = -x - \frac{2}{3}$
2	$3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} = 8$	$4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$
3	$9^x - 3^{x+1} = 54$	$3^{x+2} - 5 \cdot 3^x = 36$

Ответы к самостоятельной работе

задания	1	2	3
В-1	2	1	-1
В-2	2	1	-1

УСПЕХОВ В УЧЕБЕ!