



Диофантовы уравнения

Задача 17 (ЕГЭ математика)

17. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 300 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля.
- Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Уравнение в целых числах.

$$7x + 5y = 1200$$

$x ; y$ - целые числа.

Диофантовыми уравнениями называют алгебраические уравнения или системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, для которых надо найти целые или рациональные решения. При этом число неизвестных в уравнениях должно быть не менее двух (если не ограничиваться только целыми числами).

Диофантовы уравнения имеют, как правило, много решений, поэтому их называют неопределенными уравнениями.



*Историческая справка:

Диофант Александрийский - древнегреческий математик, живший предположительно в III веке н. э. Нередко упоминается как «отец алгебры». Автор «Арифметики» — книги, посвящённой нахождению положительных рациональных решений неопределённых уравнений.

Диофант был первым греческим математиком, который рассматривал дроби наравне с другими числами. Диофант также первым среди античных учёных предложил развитую математическую символику, которая позволяла формулировать полученные им результаты в достаточно компактном виде.

В честь Диофанта назван кратер на видимой стороне Луны.

Методы решения:

1. Способ перебора вариантов.
2. Алгоритм Евклида.
3. Цепные дроби.
4. Метод разложения на множители.
5. Решение уравнений в целых числах как квадратных относительно какой-либо переменной.
6. Метод остатков.
7. Метод бесконечного спуска.

Метод полного перебора всех возможных значений переменных.

Пример 1. Найти множество всех пар натуральных чисел, которые являются решениями уравнения: $49x + 51y = 602$.

Решение. Выразим из уравнения переменную x через y , $x = (602 - 51y) / 49$, так как x и y – натуральные числа, то $x = (602 - 51y) / 49 \geq 1$, $602 - 51y \geq 49$, $51y \leq 553$, $1 \leq 1043/51$. Полный перебор вариантов показывает, что натуральными решениями уравнения являются $x = 5$, $y = 7$.

Ответ: (5; 7).

Метод бесконечного (непрерывного) спуска

Методом бесконечного спуска называют рассуждения, проходящие по следующей схеме: предположив, что у задачи есть решения, строим некоторый бесконечный процесс, в то время как по самому смыслу задачи этот процесс должен на чём-то закончиться.

Пример 2. Решить уравнение $5x + 8y = 39$ в целых числах.

Решение.

1. Выберем неизвестное, имеющее наименьший коэффициент (в нашем случае это x), и выразим его через другое неизвестное:

$$x = \frac{39 - 8y}{5}.$$

2. Выделим целую часть:

$$x = (7 - y) + \frac{4 - 3y}{5}.$$

Очевидно, что x будет целым, если выражение $\frac{4-3y}{5}$ окажется целым, что, в свою очередь, будет иметь место тогда, когда число $4 - 3y$ без остатка делится на 5.

3. Введем дополнительную целочисленную переменную z следующим образом:

$$4 - 3y = 5z.$$

В результате получим уравнение такого же типа, как и первоначальное, но уже с меньшими коэффициентами.

4. Решаем его уже относительно переменной y , $y = \frac{4-5z}{3}$. Выделяя целую часть, получим:

$$y = 1 - z + \frac{1 - 2z}{3}.$$

5. Рассуждая аналогично предыдущему, вводим новую переменную u :

$$3u = 1 - 2z.$$

6. Выразим неизвестную с наименьшим коэффициентом, в этом случае переменную z :

$$z = \frac{1 - 3u}{2} = \frac{1 - u}{2} - u.$$

Требую, чтобы $\frac{1-u}{2}$ было целым, получим:

$$1 - u = 2v,$$

откуда

$$u = 1 - 2v.$$

Дробей больше нет, спуск закончен (процесс продолжаем до тех пор, пока в выражении для очередной переменной не останется дробей).

7. Теперь необходимо «подняться вверх». Выразим через переменную v сначала z , потом y и затем x :

$$z = \frac{1-u}{2} - u = \frac{1-1+2v}{2} - 1 + 2v = 3v - 1;$$

$$y = \frac{4-5z}{3} = \frac{4-5(3v-1)}{3} = 3-5v;$$

$$x = \frac{39-8y}{5} = \frac{39-8(3-5v)}{5} = 3+8v.$$

8. Формулы $x = 3 + 8v$ и $y = 3 - 5v$, где v – произвольное целое число, представляют общее решение исходного уравнения в целых числах.

Замечание. Таким образом, метод спуска предполагает сначала последовательное выражение одной переменной через другую, пока в представлении переменной не останется дробей, а затем, последовательное «восхождение» по цепочке равенств, для получения общего решения уравнения.

Алгоритм Евклида.

Алгоритм Евклида состоит в следующем: пусть a, b – целые числа ($b \neq 0$). Делим a на b , находим частное $q(1)$ и остаток $r(1)$; если $r(1) \neq 0$, то делим b на $r(1)$, находим частное $q(2)$ и остаток $r(2)$; если $r(2) \neq 0$, то продолжаем аналогичное деление. Этот процесс продолжается до тех пор, пока какой-то $r(n-1)$ разделится нацело на ненулевой остаток $r(n)$. Число n в этом случае называется длиной алгоритма Евклида для чисел a и b .

Пример 3. Решить диофантово уравнение $8x + 3y = 2$.

Решение. $8 / 3 \Rightarrow 8 = 3 \cdot 2 + 2, 3 = 2 \cdot 1 + 1. \Rightarrow 1 = 3 - 2 \cdot 1$
 $= 3 - (8 + 3 \cdot 2) = 3 \cdot 3 - 8 \cdot 1. 8 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 1; 8 \cdot (-2) +$
 $3 \cdot 6 = 2; \text{ следовательно, } x_0 = -2, y_0 = 6 \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + 3t, \\ y = 6 - 8t \end{array} \right., t \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $(-2 + 3t, 6 - 8t), t \in \mathbb{Z}$.

Простой способ, основанный на алгоритме Евклида.

Пример 4. $7x+5y=1200$

Решение: пусть $a=7$, $b=5$.

Составим разность $a - b = 7 - 5 = 2$, затем продолжим вычитания до тех пор пока не получим разность, равную 1.

$$5 - 2 = 3 = b - (a - b) = 2b - a$$

$$3 - 2 = 1 = 2b - a - (a - b) = 3b - 2a$$

Таким образом, $-2a + 3b = 1$.

Умножим уравнение на 1200: $-2400a + 3600b = 1200$

$x_0 = -2400$ и $y_0 = 3600$ – частные решения уравнения.


$$\begin{cases} x = -2400 + 5k \\ y = 3600 - 7k \end{cases}, k \in Z - \text{общее решение уравнения.}$$

Уменьшим коэффициенты x_0 и y_0 . Пусть $k=480$, тогда

$$\begin{cases} x = 0 + 5k \\ y = 240 - 7k \end{cases}, k \in Z$$

Исходя из условия задачи: $0 \leq x \leq 100$,

$0 \leq y \leq 300$, получим пары чисел $(0;240)$ $(5;233)$ $(10; 226)$ $(100;100)$. Из них выберем единственную пару, являющуюся решением задачи.

Задачи ЕГЭ, где используются диофантовые уравнения.

17. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 21 квадратных метров и номера «люкс» площадью 49 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1099 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» – 4500 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?
17. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 300 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

19. Натуральные числа от 1 до 20 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности найденных сумм и полученные 6 чисел складывают.

- а) Может ли в результате получиться 0?
- б) Может ли в результате получиться 1?
- в) Каково наименьшее возможное значение полученного результата?

19. Число S таково, что для любого представления S в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит 1, эти слагаемые можно разделить на две группы так, что каждое слагаемое попадает только в одну группу и сумма слагаемых в каждой группе не превосходит 17.

- а) Может ли число S быть равным 34?
- б) Может ли число S быть больше 33?
- в) Найдите максимально возможное значение S .

Список литературы:

1. Виленкин, Н.Я. За страницами учебника математики: Пособие для учащихся 5-6 классов средней школы / Н.Я. Виленкин, И.Я. Депман. – М.: Просвещение, 1989. – 287 с.
2. Башмакова, И.Г. Диофант и диофантовы уравнения / И.Г. Башмакова. – М.: Наука, 1972. – 68 с.
3. Гильфорд, А.О. Решение уравнений в целых числах / А.О. Гильфорд. – М.: Наука, 1983. – 64 с.
4. Хинчин, А.Я. Цепные дроби. / А.Я. Хинчин. – М.: Наука, 1978. – 111 с.
5. <http://mirznanii.com/a/313605/diofantovye-uravneniya>
6. <http://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2012/09/03/diofantovy-uravneniya-i-metody-ikh-resheniya>
7. <https://refdb.ru/look/3948362.html>