

Уравнения, решаемые с учетом монотонности.

**1. Решить уравнение:**  $(\sqrt{4 + \sqrt{15}})^x + (\sqrt{4 - \sqrt{15}})^x = (2\sqrt{2})^x$

**Решение.**

Разделив обе части уравнения на  $(2\sqrt{2})^x \neq 0$ , получим уравнение, равносильное

данному: 
$$\left( \frac{\sqrt{4 + \sqrt{15}}}{2\sqrt{2}} \right) + \left( \frac{\sqrt{4 - \sqrt{15}}}{2\sqrt{2}} \right) = 1$$

$$\left( \frac{\sqrt{4 + \sqrt{15}}}{2\sqrt{2}} \right) = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{15}}{8}} < 1, \text{ так как } \sqrt{15} < 4,$$

$$\left( \frac{\sqrt{4 + \sqrt{15}}}{2\sqrt{2}} \right) = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{15}}{8}} < 1.$$

Следовательно, левая часть уравнения – убывающая функция как сумма двух убывающих функций. Таким образом, уравнение не может иметь более одного корня. Несложно угадать и проверить, что  $x=2$  – корень данного уравнения.

**2. Решить уравнение** 
$$\left( \frac{1}{2} \right)^{\sin x} - \sqrt[5]{\sin x} = \left( \frac{1}{2} \right)^{\cos x} - \sqrt[5]{\cos x}.$$

**Решение.** Рассмотрим функцию  $f(t) = \left( \frac{1}{2} \right)^t - \sqrt[5]{t}$ . Она определена,

непрерывна на  $(-\infty; +\infty)$ . Как разность убывающей функции  $y = \left( \frac{1}{2} \right)^t$  и

возрастающей функции  $y = \sqrt[5]{t}$  функция  $f(t)$  убывает на  $\mathbb{R}$ . Данное уравнение имеет вид  $f(\sin x) = f(\cos x)$ . Значит, по теореме 4 оно равносильно

уравнению  $\sin x = \cos x$ ,  $\operatorname{tg} x = 1$ ;  $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

**Ответ:**  $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

3. Решить уравнение  $e^{x^2-4x+5} + \sqrt[3]{x^2-4x+5} = e^{2x^2-3x+7} + \sqrt{2x^2-3x+7}$ .

**Решение.** Пусть  $f(t) = e^t + \sqrt[3]{t}$ . Эта функция определена, непрерывна и возрастает на всей числовой прямой. Данное уравнение имеет вид:

$f(x^2-4x+5) = f(2x^2-3x+7)$  Согласно теореме 4 оно равносильно уравнению  $x^2-4x+5 = 2x^2-3x+7$ .

$$\begin{aligned} x^2 + x + 2 &= 0, & (*) \\ D = 1 - 8 &= -7 < 0, \end{aligned} \quad \text{значит уравнение } (*), \text{ а}$$

вместе и данное уравнение корней не имеет.

*Ответ:* нет корней.